

www.testesdeproficiencia.com.br - Faça o teste de profiencia e obtenha seu certificado digital gratuito, inviolável, seguro, assinado digitalmente e backup quando precisar.



Testes de Proficiência e Certificações

Certificados reconhecidos, invioláveis, validados com assinatura digital, Qr Code e Sistema de Armazenamento

E-LIVRO MATEMÁTICA APLICADA À FÍSICA

Todos os *Direitos Copyright* reservados aos autores

Faça o Teste de Proficiência neste curso e tenha seu certificado digital com Qr Code e Link de verificação, assinatura digital e Backup quando quiser! Confira nosso site! Tire suas dúvidas!!!



Acesse: www.testesdeproficiencia.com.br

Saiba mais!

2025

RECURSOS DE IMERSÃO



PENSANDO JUNTOS

Este item corresponde a uma proposta de reflexão que pode ser apresentada por meio de uma frase, um trecho breve ou uma pergunta.



APROFUNDANDO

Utilizado para temas, assuntos ou conceitos avançados, levando ao aprofundamento do que está sendo trabalhado naquele momento do texto.

PRODUTOS AUDIOVISUAIS

Os elementos abaixo possuem recursos audiovisuais. Recursos de mídia disponíveis no conteúdo digital do ambiente virtual de aprendizagem.



PLAY NO CONHECIMENTO

Professores especialistas e convidados, ampliando as discussões sobre os temas por meio de fantásticos podcasts.



EU INDICO

Utilizado para agregar um conteúdo externo.



EM FOCO

Utilizado para aprofundar o conhecimento em conteúdos relevantes utilizando uma linguagem audiovisual.



ZOOM NO CONHECIMENTO

Utilizado para desmistificar pontos que possam gerar confusão sobre o tema. Após o texto trazer a explicação, essa interlocução pode trazer pontos adicionais que contribuam para que o estudante não fique com dúvidas sobre o tema.



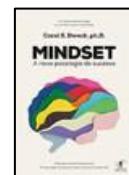
INDICAÇÃO DE FILME

Uma dose extra de conhecimento é sempre bem-vinda. Aqui você terá indicações de filmes que se conectam com o tema do conteúdo.



INDICAÇÃO DE LIVRO

Uma dose extra de conhecimento é sempre bem-vinda. Aqui você terá indicações de livros que agregarão muito na sua vida profissional.



SUMÁRIO

7

UNIDADE 1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS	8
MONÔMIOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS.....	44
EQUAÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA	86

117

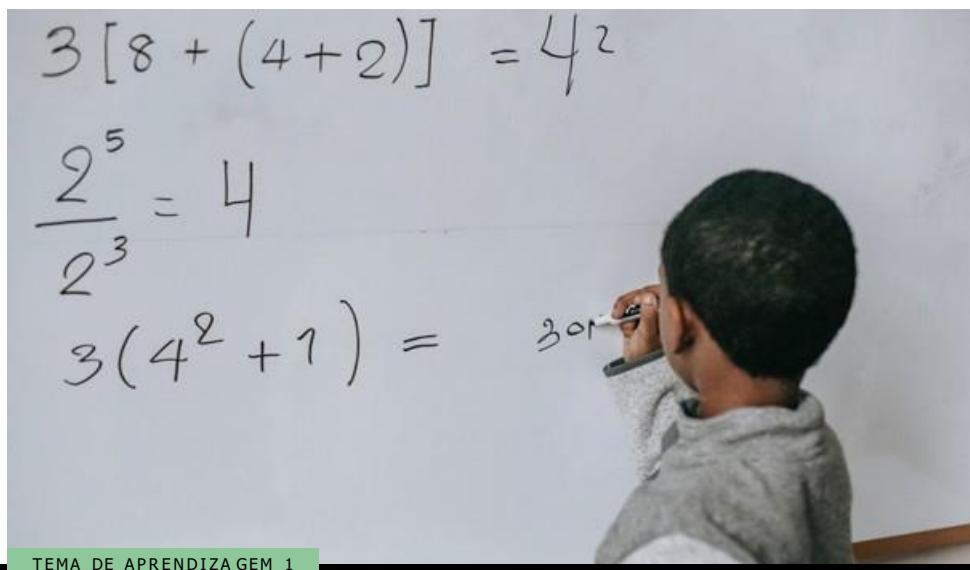
UNIDADE 2

EQUAÇÕES MODULARES E INEQUAÇÕES.....	118
CONCEITOS BÁSICOS DE FUNÇÕES	156
FUNÇÕES POLINOMIAIS, FUNÇÃO MODULAR, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA.....	194

247

UNIDADE 3

SISTEMAS LINEARES	248
CONCEITOS DE GEOMETRIA	300
TRIGONOMETRIA	360



TEMA DE APRENDIZAGEM 1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

MINHAS METAS

- Compreender os conceitos fundamentais da matemática relacionados às operações com números reais.
- Entender os conceitos de operações básicas com números reais.
- Estudar a adição, subtração, multiplicação e divisão e as suas propriedades.
- Dominar as propriedades da potenciação e radiciação.
- Aplicar os conhecimentos na resolução de problemas.

INICIE SUA JORNADA

Os números estão presentes em nossas vidas para representar quantidades mensuráveis. Eles obedecem a certas regras para que possam ser combinados. Em aplicações do dia a dia, precisamos saber essas regras para que possamos trabalhar com os números, e é isto que você estudará agora.

Toda medida física apresenta alguma incerteza. Por exemplo, considere a medição de uma peça de madeira usando uma régua milimetrada.

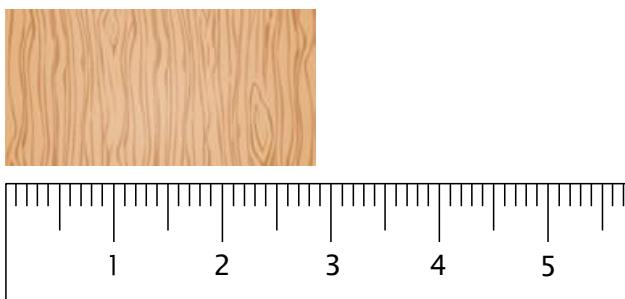


Figura 1 – Medição de uma peça de madeira usando uma régua milimetrada / Fonte: o autor.

Descrição da Imagem: a figura mostra o desenho de uma régua milimetrada em cinza claro, com os números de 0 até 5 centímetros e as respectivas subdivisões. As marcas menores indicam os décimos de centímetros, tendo uma ligeira diferença de tamanho a cada cinco décimos a partir do centímetro. Posicionada acima da régua, há um retângulo pintado de cinza escuro e de base maior do que a altura, simulando a medida efetuada pela régua em relação ao comprimento da base da peça retangular. A peça, de borda preta, indica um comprimento aproximadamente igual a 2,77 cm. Fim da descrição.

Ao olhar para a Figura 1, você pode ter a impressão de que o comprimento seja 2,75 cm, enquanto em outro momento, ou para outra pessoa, ela apareça ter 2,77 cm.

Como é possível saber que estamos no caminho certo de uma medida física como essa? Quem tem a razão sobre o comprimento dessa medida?



PLAY NO CONHECIMENTO

Exploramos a relação das medidas com o mundo real e a existência de átomos no podcast.

VAMOS RECORDAR?

Neste vídeo, a professora e youtuber Gis revisa o conteúdo dos conjuntos numéricos, essenciais para entender como organizar os números em conjuntos e apresenta as características que definem cada um deles. Os números reais constituem o maior desses conjuntos (sem considerar os números complexos, que é conversa para outro momento), e as propriedades operatórias desse conjunto é o assunto principal deste tema.

DESENVOLVA SEU POTENCIAL

OS NÚMEROS REAIS

Representado pela letra \mathbb{R} , o conjunto dos números reais é formado pelos conjuntos dos números naturais (\mathbb{N}), inteiros (\mathbb{Z}), racionais (\mathbb{Q}) e irracionais (\mathbb{I})

$$\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Em outras palavras, os números reais compreendem todos os números: positivos, negativos, fracionários com dízima periódica ou sem dízima periódica.

Exemplos dos números reais são: $+3, -1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, \pi$.

Os números reais podem ser representados graficamente por uma reta em que os números são ordenados, conforme ilustrado na figura.

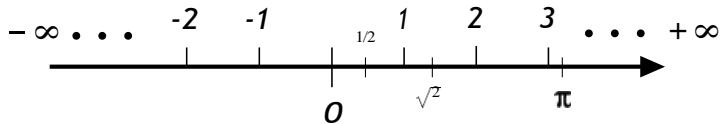
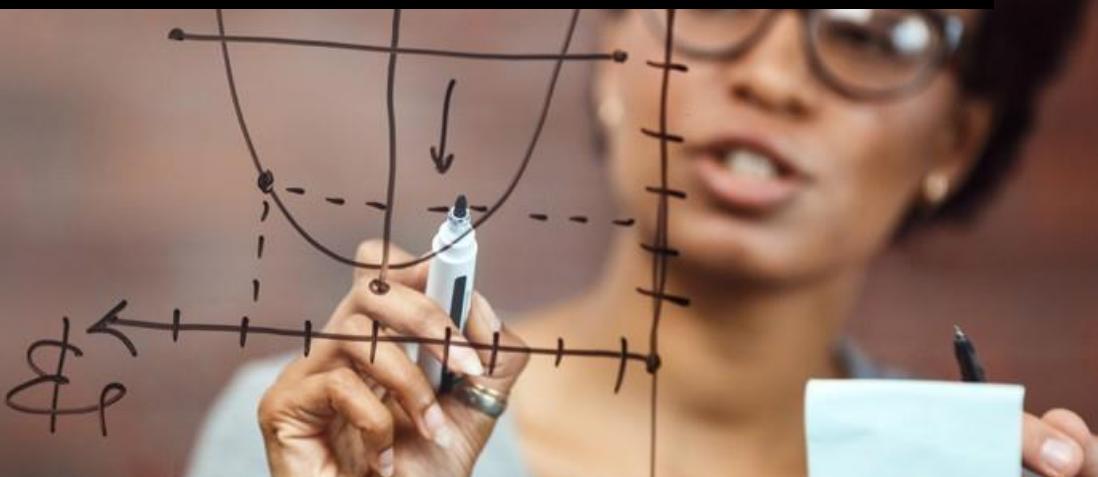


Figura 2 – Os números reais ordenados na representação gráfica / Fonte: autor.

Descrição da Imagem: a figura apresenta uma semirreta horizontal com uma seta na extremidade direita apontando da esquerda para a direita, no sentido crescente dos números. No centro desta reta, há o número zero. À esquerda do zero estão os números negativos, como -1 , -2 , reticências para representar os infinitos números até o símbolo da lemniscata, com um sinal negativo que é o símbolo do infinito. À direita do zero estão os números positivos, como $+1$, $+2$ e $+3$, seguidos por algumas constantes matemáticas conhecidas e que se encontram entre esses números, como $1/2 = 0,5$ na metade entre o zero e o um. Entre os números 1 e 2 , está a raiz quadrada de 2 , cujo valor é aproximadamente igual a $1,41$. Depois do $+3$, está representado na figura a constante matemática representada pela letra grega “pi”, cujo valor é aproximadamente igual a $3,14$, seguido de reticências para representar os infinitos números até o símbolo da lemniscata com sinal positivo, que é o símbolo do infinito. Fim da descrição.

Nesta representação gráfica dos números reais, você deve imaginar o zero como um espelho.

Vamos iniciar então pelas operações fundamentais agora, em que veremos como podemos efetuar as quatro operações e, posteriormente, a potenciação e a radiciação. Iniciaremos por regras de como os números se combinam, primeiro com os números inteiros, depois racionais e, finalmente, irracionais, complementando o conjunto dos reais com exemplos.



AS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Medidas de comprimento, tempo e massa são feitas por meio de comparações com padrões estabelecidos. Grandezas como essas seguem as regras de operações básicas com os números reais.

Mesmo quando pensamos que sabemos efetuar as operações básicas, veremos que alguns cuidados devem ser tomados. Que tal estudarmos mais sobre isso?

Adição e subtração

Quando você usa uma trena para efetuar uma medida de comprimento, por exemplo, essa trena apresenta um tamanho finito que pode ser menor do que o comprimento que você precisa medir.

O que você faz então? Ao final de toda a trena, marca o novo início do posicionamento dela e a aciona novamente até que o comprimento total possa ser delimitado.

Assim, se você quiser medir um comprimento que é maior do que a trena, você precisa somar as suas medições, que é o processo de adição tratado nesta seção. Isto também vale para massas (kg), tempos (s) e quaisquer medidas que possam ser somadas.

Não é o que ocorre com a temperatura. Se um copo estiver com água a 25 °C e outro copo de água a 60 °C for adicionado ao primeiro, a temperatura final da mistura não será 85 °C, mas uma temperatura intermediária.

Para compreender o processo de adição e subtração, vamos iniciar com um passo importante: a soma de dois números positivos resulta em um número positivo. Podemos estabelecer algumas “regras” para a soma e subtração, mas tente não decorar, e sim entender a aplicação desses fundamentos no dia a dia.

Quando temos números inteiros ou decimais, é relativamente simples efetuar essas operações, como se segue. Se os números apresentarem sinais iguais, então você soma esses números e mantém o sinal comum a eles:

$$+3 + 2 = +5$$

$$-3 - 2 = -5$$

A soma de dois números positivos resulta em um número positivo

Caso os sinais sejam diferentes, você deve subtrair os números e manter o sinal do maior número:

$$+3 - 2 = +1$$

$$-3 + 2 = -1$$

O dinheiro é um exemplo. Se você faz uma venda de algo por três reais e depois outra mercadoria por dois reais, então você ganhou cinco reais. Se você for a pessoa que comprou essas duas mercadorias, então você gastou cinco reais.

No caso dos sinais diferentes, pense assim: se você vendeu uma mercadoria por três reais, mas ela teve um custo de produção de dois reais, então você teve um lucro de um real (positivo).

No outro caso, se você comprou uma mercadoria por três reais, mas a vendeu por dois reais, então você não obteve lucro, mas um prejuízo de um real.

Se os números são decimais, isto é, não estão na forma de fração, mas não são inteiros, então essas operações se tornam triviais:

$$0,25 + 0,10 = 0,35$$

Todas as outras regras apresentadas para os inteiros apresentados anteriormente também valem para os decimais. Apenas tome cuidado com o posicionamento da vírgula.

No caso das frações, só podemos somar ou subtrair frações que possuam o mesmo denominador. Exemplo: calcule a soma das frações:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5}.$$

Observe a representação geométrica:

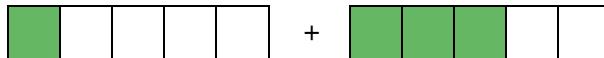


Figura 3 – Representação geométrica das frações envolvidas na adição mostrada no exemplo
Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura apresenta dois retângulos de mesmo tamanho, de base maior do que a altura, cada um dividido em cinco partes iguais. No primeiro, à esquerda, apenas uma parte das subdivisões está pintada de verde, indicando a fração um quinto. No segundo retângulo, à direita, três quadrados estão pintados dentro do retângulo maior, indicando a fração três quintos. Há um sinal de adição entre as figuras, indicando a representação geométrica da soma $1/5 + 3/5$. Fim da descrição.

Na Figura 3, à esquerda, temos a representação da fração $1/5$, enquanto à direita, temos a representação da fração $3/5$. Como as duas barras estão divididas em cinco partes iguais (observe o denominador das frações a serem somadas), então podemos “transportar” as quantidades, ficando com quatro das cinco partes do todo:

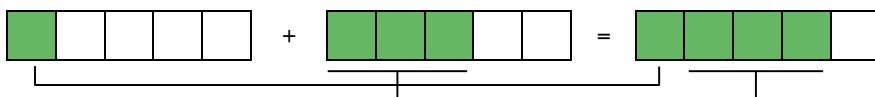


Figura 4 – Representação geométrica das parcelas envolvidas e do resultado da soma das duas frações
Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura apresenta três retângulos de mesmo tamanho, divididos em cinco partes iguais. Os dois primeiros correspondem aos dois retângulos da Figura 4. O terceiro retângulo, depois do sinal de igualdade, apresenta quatro partes preenchidas em verde, indicando que o resultado da soma de uma parte em cinco com três partes em cinco é igual a quatro partes em cinco. Fim da descrição.

Algebraicamente, escrevemos que uma parte em cinco, somada com três partes em cinco, fornecem quatro partes em cinco:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Observe este outro exemplo. Calcular a diferença:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$$

Vamos recorrer novamente à representação geométrica dessas frações.

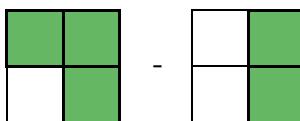


Figura 5 – Representação geométrica das parcelas da diferença entre as duas frações do exemplo
Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura apresenta dois quadrados, cada um subdividido em quatro quadrados menores e de mesmo tamanho. O primeiro quadrado maior, à esquerda, contém três quadrados menores preenchidos em cor verde: o superior esquerdo, o superior direito e o inferior direito. O segundo quadrado maior contém dois quadrados menores preenchidos em verde: o superior e inferior direitos. Há um sinal de subtração entre os quadrados maiores, indicando a representação geométrica das frações envolvidas na subtração do exemplo.

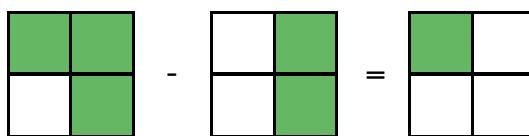


Figura 6 – Representação geométrica das parcelas da subtração e do resultado dessa operação
Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura apresenta agora três quadrados maiores subdivididos em quatro partes iguais, cada um. Os dois primeiros à esquerda são os mesmos da Figura 5, e o terceiro quadro maior representa geometricamente o resultado da diferença entre as frações três quartos e dois quartos, em que apenas um dos quadrados menores que compõem o quadrado maior está pintado de verde, e representa a fração um quarto.

Algebraicamente, assim como na adição, na subtração, o denominador é repetido e os numeradores são subtraídos.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

E se quisermos somar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, como fazer?

Geometricamente, teremos:



Figura 7 – Cada retângulo representa uma parcela da fração envolvida na soma com denominadores diferentes / Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura mostra dois retângulos de base maior do que a altura e de mesmo tamanho. Cada retângulo foi subdividido internamente de acordo com a fração que representa na soma com denominadores distintos: o primeiro retângulo é subdividido em duas partes iguais no sentido da base. O retângulo superior está pintado de cinza. O segundo retângulo está dividido em três partes iguais no sentido da altura do retângulo maior. Apenas o retângulo da esquerda está preenchido com cor cinza. Fim da descrição.

Na Figura 7, note que, se “transportarmos” a quantidade $1/2$ para $1/3$, como feito anteriormente para denominadores iguais, não caberá. Do mesmo modo, se “transportarmos” a quantidade $1/3$ para $1/2$, sobrará espaço. Isso porque o todo está repartido em quantidades diferentes e, pela definição, somente podemos somar e subtrair frações que possuem o mesmo denominador, ou seja, que estejam repartidas em quantidades iguais.

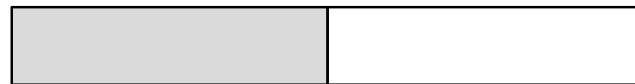
Para podermos efetuar essa operação, devemos recorrer a frações equivalentes. Frações equivalentes são aquelas que representam a mesma parte do todo.

As frações equivalentes representam uma mesma parte do todo. Observe a Figura 8 e veja como, em todas elas, há um retângulo inteiro, porém, em cada linha, o retângulo foi dividido de maneira distinta.





1 inteiro



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{3}{6}$



$\frac{4}{8}$



$\frac{5}{10}$



$\frac{6}{12}$

Figura 8 – Representação geométrica das frações equivalentes

Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura mostra sete retângulos empilhados de base maior do que a altura e de mesmo tamanho. Cada retângulo foi subdividido internamente de acordo com a fração que representa. O primeiro retângulo não foi dividido e representa um inteiro. O segundo retângulo foi dividido em duas partes iguais e uma delas foi pintada de cinza, para mostrar a fração um meio. O terceiro retângulo está dividido em quatro partes iguais, mas duas foram pintadas de cinza, expressando a fração dois quartos, que é equivalente à fração dois meios. O quarto retângulo traz a fração três sextos, com o retângulo dividido em seis partes iguais, em que três delas foram pintadas de cinza. Na quinta linha o retângulo está dividido em oito partes iguais, em que quatro delas estão pintadas de cinza. A sexta linha traz o mesmo retângulo dividido em dez partes, das quais cinco estão marcadas em cinza. Finalmente, na sétima linha Todas as figuras apresentam a mesma área hachurada. Fim da descrição.

A parte hachurada é corresponde a uma mesma parte do todo. Logo, todas as frações mostradas são equivalentes.

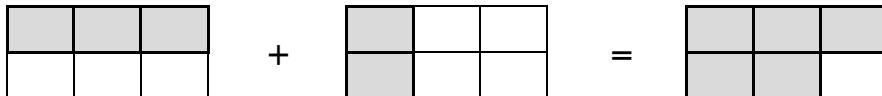


Figura 9 – Representação geométrica das frações $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{5}{6}$. As duas primeiras são equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente / Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura mostra três retângulos iguais com base maior do que a altura. Todos eles estão subdivididos em seis partes iguais, representadas por quadrados interiores aos retângulos. No primeiro retângulo, os três quadrados superiores estão preenchidos com cor cinza, representando três partes das seis. Em seguida, separado por um sinal de adição, há o segundo retângulo, porém apenas os dois primeiros quadrados da esquerda – superior e inferior – foram preenchidos com cor cinza, representando a fração dois sextos. Finalmente, após um sinal de igualdade, há o terceiro retângulo, em que é feita a transposição da quantidade de quadrados pintados do primeiro sobre o segundo, representando o resultado da operação de adição entre as duas frações e constituindo a fração cinco sextos. Fim da descrição.

Agora, com as frações todas escritas com o mesmo denominador, o que é representado geometricamente pela quantidade de quadrados em cada retângulo (o todo), então a soma pode ser efetuada pela “transposição” da quantidade de quadrados pintados sobre o outro retângulo. Algebricamente, escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Assim, quando as frações não possuem o mesmo denominador, é preciso reduzi-las ao mesmo denominador, ou mínimo múltiplo comum e, em seguida, somar as frações equivalentes às frações dadas.

Como obter o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre dois denominadores distintos? Vamos encontrar os múltiplos comuns de 3 e 5.

- Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 21, 24, 27, 30, ...
- Múltiplos de 5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...
- Múltiplos comuns de 3 e 5: 0, 15, 30, 45, 60, ...

Vamos relembrar uma técnica chamada de “decomposição simultânea em fatores primos”. Ela consiste em decompor cada denominador em fatores primos. O produto de todos os fatores primos que aparecem nessa decomposição será o mínimo múltiplo comum.

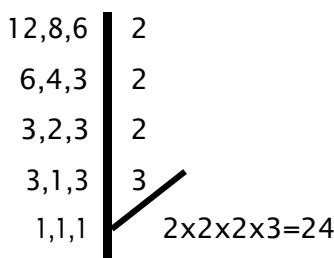


Figura 10 – Ilustração do processo de decomposição em fatores primos
Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: na primeira linha da imagem há a sequência 12, 8 e 6. Ainda na primeira linha, separado por um traço vertical preto, há o número 2. Na segunda linha, a sequência agora é 6, 4 e 3 e novamente o 2 se repete na coluna à direita. Na terceira linha, a sequência agora é 3, 2 e 3, ainda com o número 2 acompanhando à direita. Na penúltima linha, os números são 3, 1 e 3, e agora o número à direita vale 3. Na última linha, a sequência é 1, 1 e 1 e, do lado direito, está mostrado em vermelho o produto desses números da coluna à direita, isto é, $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$. Fim da descrição.

Multiplicação e divisão

Tanto na multiplicação quanto na divisão, você precisa se lembrar da regra de sinais:

$$\begin{cases} (+) \cdot (+) = (+) \\ (-) \cdot (-) = (+) \\ (+) \cdot (-) = (-) \\ (-) \cdot (+) = (-) \end{cases}$$

Assim, vamos considerar novamente os números 3 e 2. Observe o exemplo:

$$\begin{aligned} (+3) \cdot (+2) &= (+6) \\ (-3) \cdot (-2) &= (+6) \\ (+3) \cdot (-2) &= (-6) \\ (-3) \cdot (+2) &= (-6) \end{aligned}$$

Para as frações, basta multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador. Produto de duas frações:

$$\frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{1 \times 5}{3 \times 4}$$

$$= \frac{5}{12}$$

Para a divisão, existe uma regra algébrica: mantenha a primeira fração e inverta a segunda, multiplicando uma pela outra. Exemplo: calcule a divisão seguinte:

$$\frac{1}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{15}$$

APROFUNDANDO

A regra exposta anteriormente para a divisão de frações é proveniente do seguinte. O que se pretende ao multiplicar numerador e denominador da primeira fração pelo denominador e numerador da segunda fração é obter um denominador igual a uma unidade, para operar apenas com o numerador, facilitando o cálculo. Observe:

$$\frac{1}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1 \times 2}{1 \times 2}$$

$$= \frac{5}{3} \div \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{1} \times \frac{2}{3}$$

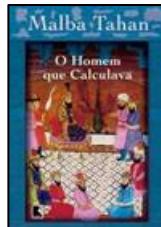
$$= \frac{5}{1} \times \frac{2}{1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Rigorosamente, na matemática, definem-se duas operações no conjunto dos números reais: a adição e a multiplicação. Todas as outras operações decorrem das propriedades dos reais, por exemplo, a subtração é a soma de um número com o seu simétrico, enquanto a divisão é a multiplicação de um número pelo seu inverso. É também propriedade dos reais a existência de um elemento neutro para a soma, chamado zero, e um elemento neutro para a multiplicação, que é o número um.

 INDICAÇÃO DE LIVRO

No livro “O Homem que Calculava”, o autor Malba Tahan (pseudônimo do matemático e professor Júlio César de Mello e Souza), conta as proezas do calculista persa Beremiz Samir, que percorre a Pérsia resolvendo de modo espetacular problemas que lhe eram apresentados aparentemente sem solução. Um dos problemas mais famosos é o dos 35 camelos, quantidade essa de animais que havia sido deixada como herança de um pai para os seus três filhos. Como o problema parece insolúvel, pois 35 não é divisível por 3, Beremiz propõe uma solução com o conhecimento das operações com as frações.



PROPRIEDADES DOS NÚMEROS REAIS

COMUTATIVIDADE:

$$a + b = b + a$$

Exemplo: $2 + 3 = 3 + 2$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemplo: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

ASSOCIATIVIDADE

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Exemplo: $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$, ou seja, o resultado será o mesmo, não importa se você some primeiro o três com o quatro e depois o resultado com o dois, ou se você some primeiro o dois e o três, e depois adicione o resultado dessa operação com o quatro.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Exemplo: $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$

DISTRIBUTIVIDADE

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exemplo: para entender este exemplo, lembre-se de que os parênteses têm a prioridade numa expressão algébrica.

Deste modo,

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 + 4) &= 2 \cdot 7 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Efetuando a distributiva:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 + 4) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ &= 6 + 8 \\ &= 14 \end{aligned}$$

EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO:

Veja a reta real da Figura 2. Existe apenas um elemento neutro para a adição (e subtração), chamado de 0 (zero). Para qualquer que seja o número a , vale: $a + 0 = a$.

Para a multiplicação (e divisão), também existe apenas um elemento neutro, chamado de 1 (um). Para qualquer que seja o número a , vale: $a \cdot 1 = a$.

EXISTÊNCIA DE SIMÉTRICOS:

Na abertura deste tema, na Figura 2 da reta real, pedimos para que você imaginasse que havia um espelho no número zero. Note como os elementos são simétricos: para cada número do lado direito, existe um correspondente do lado esquerdo com o sinal trocado, de modo que a soma deles resulta no “espelho”: todos os simétricos estão a uma mesma distância na reta real. Na matemática, escrevemos que, se a é um número real, então $-a$ é o seu simétrico, ou seja: $a + (-a) = 0$.

EXISTÊNCIA DE INVERSOS

De maneira parecida com os simétricos, existe na reta real o inverso de um número a , e ele é escrito como $1/a$. Evidentemente, se você olhar novamente na Figura 2 (reta real), o número zero não apresenta inversa, de maneira que nessa definição, $a \neq 0$. Assim, o inverso apresenta a propriedade:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Desde que a não seja zero.

Muitas das dificuldades encontradas com a matemática ocorrem pela linguagem usada. Quando você aprende os termos e sabe como trabalhar com eles, então tudo passa a fazer sentido. As propriedades que estudamos recentemente estão todas escritas em linguagem matemática, mas usamos diariamente.

Um dos aspectos mais fundamentais dessa linguagem matemática por meio dos símbolos é que ela é universal. Você até pode efetuar as operações escrevendo por extenso, mas é algo que demandaria muito tempo.



INDICAÇÃO DE LIVRO

Em busca do infinito.

Autor: Ian Stewart

Nem sempre utilizamos os algarismos como conhecemos hoje e tampouco os sinais de adição, subtração, multiplicação e divisão. Por muito tempo foram utilizados diversos símbolos para representar elementos matemáticos ou até mesmo a linguagem por extenso.

Neste livro, o autor percorre a história para mostrar como temas essenciais da matemática foram desenvolvidos com o tempo e em diferentes culturas.



Veremos agora duas operações de fundamental importância na matemática: a potenciação e a radiciação. Elas estão profundamente conectadas com a multiplicação e a divisão e, por sua vez, estas estão ligadas com a adição e subtração.

Potenciação e radiciação

Quantidades monetárias podem ser somadas e subtraídas e, quando sujeitas aos juros, seguem ainda outras operações dos números reais, como a potenciação. A potenciação indica multiplicações de fatores iguais. Observe os elementos que compõem a potenciação na Figura 11.

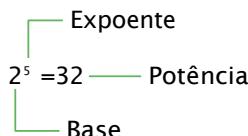


Figura 11 – Denominações dos elementos da potenciação / Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura mostra o número dois com o número cinco sobreescrito a ele e, após o sinal de igualdade, vem o número trinta e dois. Em cada um dos números há uma ligação em linha verde para o nome que se dá a esses números na potenciação. O número dois é a base, o número cinco é o expoente e o número trinta e dois é chamado de potência. Fim da descrição.

A base é o fator que se repete na multiplicação, o expoente indica a quantidade de vezes que o fator irá se repetir, e a potência é o resultado da operação. Dessa

forma, potência é todo número na forma a^n , com $a \neq 0$, em que a é a base e n é o expoente:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

Observe os exemplos seguintes de como efetuar o cálculo da potenciação em várias situações.

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

a)
= 81

b) $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2)$
= 4

c) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
= -8

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
= $\frac{16}{25}$

Base negativa elevada a um expoente par resulta em um número positivo.

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3)
= 9$$

Base negativa elevada a um expoente ímpar resulta em um número negativo.

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)
= -27$$

Nessas operações, é fundamental se recordar da regra dos sinais!

Uma dúvida muito comum é sobre a combinação dos números com potência. Veja, na sequência, as propriedades da potenciação.

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE BASES IGUAIS:

Repete-se a base e somam-se os expoentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \\ &\qquad\qquad\qquad 7 \text{ vezes} \\ &= 2^7 \end{aligned}$$

DIVISÃO DE POTÊNCIAS DE BASES IGUAIS

Repete-se a base e subtraem-se os expoentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\begin{aligned} \frac{2^5}{2^3} &= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} \\ &= \cancel{\cancel{2}} \times \cancel{\cancel{2}} \\ &\qquad\qquad\qquad 2 \text{ vezes} \\ &= 2^2 \end{aligned}$$

POTÊNCIA DA POTÊNCIA

Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes: $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$$\begin{aligned} (2^3)^2 &= (2 \times 2 \times 2)^2 \\ &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \\ &= \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \\ &\qquad\qquad\qquad 6 \text{ vezes} \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

POTÊNCIA CUJA BASE É UM PRODUTO:

Cada termo que compõe a base é elevado ao expoente em comum e a multiplicação é efetuada: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$$\begin{aligned}(3 \times 5)^2 &= (3 \times 5) \times (3 \times 5) \\&= 3 \times 5 \times 3 \times 5 \\&= \cancel{3} \times \cancel{5} \\&\quad \text{2 vezes} \quad \text{2 vezes} \\&= 3^2 \times 5^2\end{aligned}$$

POTÊNCIA CUJA BASE É UM QUOCIENTE:

Cada termo que compõe a base é elevado ao expoente em comum e a divisão é efetuada: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}\right)^2 &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \\&= \frac{3 \times 3}{5 \times 5} \\&= \frac{3^2}{5^2}\end{aligned}$$

EXPOENTE NEGATIVO:

Reveja o item 1 deste Accordeon. Observe que

$$\begin{aligned}a^n \times a^{-n} &= a^{n-n} \\&= a^0 \\&= 1\end{aligned}$$

que é igual a unidade, caso $a \neq 0$. Assim, é também verdade que

$$a^n \times a^{-n} = 1, \text{ de onde se conclui que: } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

EXPOENTE FRACIONÁRIO:

Toda potência de expoente fracionário pode ser transformada em um radical, em que o denominador do expoente é o índice da raiz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\begin{aligned} 3^{\frac{1}{2}} &= \sqrt[2]{3^1} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

A potenciação é amplamente utilizada na física. Uma das aplicações mais fundamentais da potenciação é a **notação científica**.

A física é a ciência cujo objetivo é estudar os componentes da matéria e as suas interações mútuas. (FINN; ALONSO, 2018, p. 21).

Desse modo, a física estuda os fenômenos do ponto de vista qualitativo e quantitativo. Para estudar, prever o comportamento ou até mesmo executar de modo controlado os fenômenos que ocorrem naturalmente, é essencial efetuar medidas.

Como a física é desse nível de abrangência, ela trabalha desde o muito pequeno, como os átomos, moléculas e partículas subatômicas, até o muito grande, como os objetos astronômicos. Efetuar e descrever medidas em tais escalas distintas exige uma maneira que possa facilitar a descrição.

Notação é o termo que se usa na matemática para representar algo de modo simbólico. É a maneira de escrever alguma coisa. Por exemplo, quando escrevemos a potência como a^n , queremos dizer que a notação para a potência é essa. É mais econômico do que escrever: "a elevado à n".

A notação científica é definida como:

$$a \times 10^b,$$

em que a é chamado de **mantissa** e, por norma, é um número maior ou igual a 1, e menor do que 10. O número b é a chamada **ordem de grandeza**.

Por exemplo, a quantidade de moléculas de água (H₂O) em uma única gota d'água (assumindo uma gota contendo 0,05 ml) é de $1,67 \times 10^{21}$ moléculas, um número praticamente impossível de escrever quando precisamos utilizá-lo (ABDULACK, 2021).

O diâmetro médio da eletrosfera de um átomo é de cerca de 10^{-10} metros. A massa do Sol é de $1,99 \times 10^{30}$ kg.

Em nossa escala do dia a dia, não temos objetos que são representados por números tão pequenos ou tão grandes, mas dependendo da grandeza física, isso é necessário.

O processo de medição na física e nas engenharias é fundamental e é essencial que saibamos trabalhar e manipular as medidas. Aquilo que escrevemos como kg (quilograma), m (metro), s (segundo), A (ampère), K (kelvin), chamamos de **unidade de medida**.

A primeira coisa é que nos cálculos que envolvam unidades de medida, as unidades de medida se comportam como se fossem números e todas as operações que você viu até aqui valem para as unidades de medida também.

Assim, quando vamos calcular uma área, cujas dimensões foram estabelecidas em metro, escrevemos a resposta dessa área em metros quadrados. Isso acontece porque $1\text{ m} = 1\text{ m}^1$, ou seja, o símbolo do metro está elevado ao expoente 1. Logo, ao expressar o produto de dois comprimentos, o símbolo do metro se comporta como se fosse um número e segue também às propriedades da potenciação:

$$(1\text{ m}) \times (1\text{ m}) = 1\text{ m}^2$$

A segunda coisa é que o número de algarismos mostrados após uma medição indica diretamente a precisão daquela medida. Assim, quando escrevemos 1,0 m e 1,00 m, queremos dizer que a última medida é mais precisa do que a primeira.

Radiciação

Poderíamos efetuar a operação inversa: dada uma área quadrada, por exemplo, de um terreno, o lado é conhecido pela raiz quadrada.

Do mesmo modo que a subtração é a operação inversa da adição e a divisão é a operação inversa da multiplicação, a radiciação é a operação inversa da potenciação.

APROFUNDANDO

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Define-se a raiz enésima de a , em que a e n são denominados respectivamente por radicando e índice da raiz, da forma $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, sendo que o número b é único e:

- Se n for par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$;
- Se n for ímpar e $a < 0$, então $b < 0$;
- Se $a \geq 0$, então $b \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

A raiz quadrada é a mais conhecida das operações de radiciação, mas há muitas aplicações em que a raiz é de outra ordem, ou índice. Observe, na Figura 12, os elementos da radiciação.

$$\sqrt[n]{\text{Índice}} \quad a = b \quad \text{Raiz}$$

Radicando

Figura 12 – Elementos da radiciação / Fonte: adaptada de Bonatti *et al.* (2015).

Descrição da Imagem: a figura mostra a letra “a” dentro do símbolo da enésima raiz com uma ligação por um segmento preto indicando que “a” é a radiciação. No canto superior esquerdo do símbolo da raiz, há a letra “n” e um segmento preto aponta para a sua denominação, que é o índice. Após o sinal de igualdade, vem o número “b” com o texto “Raiz” logo ao seu lado. Fim da descrição.

Exemplos de raízes conhecidas:

a) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$

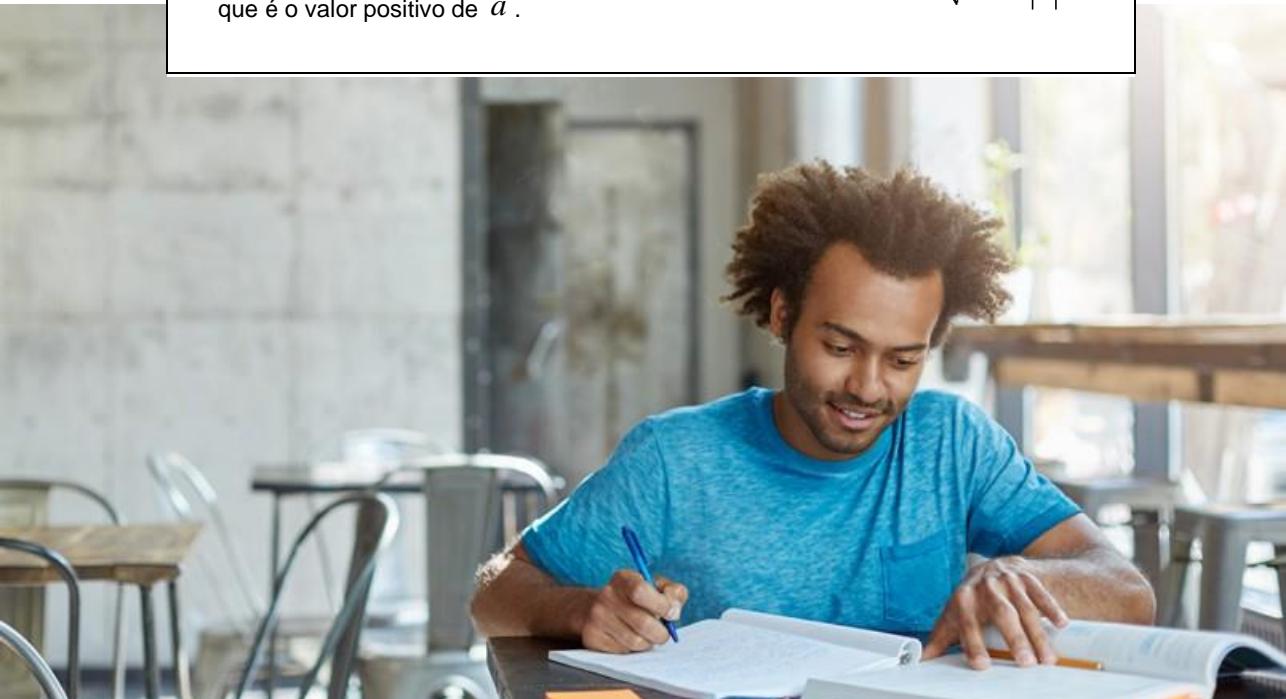
b) $\sqrt{81} = 9$, pois $9^2 = 81$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$

d) $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$

APROFUNDANDO

Embora alguns autores possam divergir quanto a isto, a raiz quadrada de um número é definida como sendo um número positivo. Note, contudo, que $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$ e que $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$, o que poderia passar a ideia de que a raiz de 25 pode ser tanto +5 quanto -5. Mas isto não é bem preciso. Existe uma outra maneira de escrever a raiz quadrada de um número ao quadrado, que é o valor absoluto (módulo) do número: $\sqrt{a^2} = |a|$, que é o valor positivo de a .



Quando às raízes que não são conhecidas, pode ser usada a técnica de fatoração em números primos, já estudada anteriormente. Assim, considere, por exemplo, $\sqrt{144}$. Vamos construir uma tabela para auxiliar na fatoração, explicando cada passo.

144	2	Divisão de 144 por 2
72	2	Divisão de 72 por 2
36	2	Divisão de 36 por 2
18	2	Divisão de 18 por 2
9	3	Divisão de 9 por 3
3	3	Divisão de 3 por 1
1		
Forma fatorada	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$	

Quadro 1 – Fatoração do número 144 em fatores primos / Fonte: autor.

Com a fatoração, podemos trocar o 144 pela sua forma fatorada dentro da raiz:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{144} &= \sqrt{2^4 \cdot 3^2} \\
 &= \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \\
 &= 2^2 \cdot 3 \\
 &= 4 \cdot 3 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

De fato, $12^2 = 144$.

Na física, em várias situações precisamos trabalhar com potências e raízes. Por exemplo, o período (T) de um pêndulo simples depende de uma raiz quadrada da razão entre o comprimento do fio (L) e a aceleração da gravidade (g):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Se você for ao laboratório para medir a aceleração da gravidade local usando um pêndulo simples, então terá de reescrever a equação do período da seguinte maneira:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

No mesmo contexto das potências, também está o movimento retilíneo uniformemente variado, aquele com a aceleração constante. Quando um objeto se movimenta com a aceleração constante e em uma trajetória reta, a sua posição varia com o quadrado do tempo. A aceleração é o “como” a velocidade varia.

Vamos ver agora as propriedades da radiciação.

PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

SOMA E SUBTRAÇÃO DE RAÍZES:

É necessário que os radicais sejam semelhantes, isto é, tenham índice e radicando iguais.

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{3}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE RADICAIS (ÍNDICES IGUAIS):

Se os índices são iguais, a operação é efetuada normalmente.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0\end{aligned}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE RADICAIS (ÍNDICES DISTINTOS):

É preciso reduzir ao mesmo índice neste caso.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$$

Conforme você viu nas propriedades da radiciação, quando temos índices distintos, é necessário ter um cuidado redobrado, e vamos demonstrar a redução ao mesmo índice.



APROFUNDANDO

Você precisa se lembrar da propriedade 7 do expoente fracionário da potenciação, que abordamos no início desta seção. Assim, podemos escrever uma raiz como um número elevado a um expoente fracionário. Relembrando,

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Assim, na multiplicação (e divisão) de raízes com índices distintos, precisamos trabalhar neste sentido para reduzir as raízes ao mesmo índice.

Sendo $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, o produto será:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}}$$

Agora, olhe para os expoentes. Se multiplicarmos o denominador do primeiro por m e o denominador do segundo por n, então todos eles terão o mesmo denominador. Contudo, para não alterar a fração, também precisamos multiplicar o numerador do expoente do a por m e o numerador do expoente do b por n. Matematicamente:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{n \cdot m}} \cdot b^{\frac{n}{n \cdot m}}$$

Ou ainda:

$$(a^m)^{\frac{1}{n \cdot m}} \cdot (b^n)^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$$

Finalmente, em muitas situações, é essencial racionalizar uma fração cujo denominador é um radical.

Isso significa achar uma fração equivalente a ela com denominador inteiro. É equivalente a dizer que precisamos eliminar a raiz do denominador. Para fazer isto, devemos multiplicar numerador e denominador pela raiz, lembrando que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{5}} &= \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Para eliminar a raiz do denominador que contém uma soma ou subtração de radicais, devemos multiplicar o numerador e denominador pelo conjugado do termo que contém a raiz. Observe o exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} \\ &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

EM FOCO

Acesse o conteúdo da disciplina e conheça mais sobre este tema. **Recursos de mídia disponíveis no conteúdo digital do ambiente virtual de aprendizagem.**



NOVOS DESAFIOS

O processo de medição envolve essencialmente comparar o mensurando com um padrão pré-estabelecido, mas ainda mais fundamental é compreender que medir algo é na verdade fornecer um intervalo e não um número.

Lá no início, na Figura 2, você viu que as leituras em uma simples régua milimetrada podem divergir. Mas uma coisa é certa: todos concordamos que ela tem 2,7 cm de comprimento. O segundo algarismo depois da vírgula é que nos deixa em dúvida.

Isso ocorre porque não temos mais subdivisões na régua da Figura 2, que é a régua que usamos no dia a dia. Todo instrumento de medida é assim: com precisão limitada, por mais que seja bastante preciso.

Um paquímetro, por exemplo, é muito mais preciso em medir pequenos comprimentos (sejam externos, internos e de profundidade).

Por exemplo, quando escrevemos que a peça de madeira da Figura 2 mede 2,77 cm de comprimento, implicitamente dizemos que essa medida tem três algarismos significativos de precisão e indica a precisão do instrumento com o qual esta medida foi efetuada.

Em todas as medidas físicas experimentais, precisamos escrever todos os algarismos que temos certeza até o primeiro algarismo que tivemos de estimar. O último algarismo em 2,77 ou em 2,75 é chamado de algarismo duvidoso, mas ele precisa ser o último mostrado em uma medida.

Assim, uma medida de 1,0 m é diferente de uma medida de 1,00 m, pois essa indica uma precisão maior do que aquela, já que apresenta mais algarismos significativos.

Após uma medida, ou se você se deparar com um valor já medido, por exemplo 0,001520 kg, e precisar determinar o número de algarismos significativos na medida, o primeiro passo é escrever essa medida em **notação científica**, estudada quando tratamos da potenciação.

Nesse caso, “movimentamos” a vírgula para a direita, até que o primeiro dígito seja um número maior ou igual a 1 ou menor do que 10. Nesse caso, a vírgula precisará “andar” três números, até ficar entre o 1 e o 5 da medida. Aí, basta usar uma potência de dez negativa, que é justamente a ideia da notação científica, ficando igual a $1,520 \times 10^{-3}$ kg.

Uma aplicação direta da notação científica é que o número de algarismos mostrados na mantissa é exatamente o número de algarismos significativos, indicando a precisão da medida.

Conhecimentos como esses permitem primeiro que entendamos a natureza da incerteza na medição e consigamos estabelecer, por meio de análises deste tipo, um limite para o erro e para os valores toleráveis em uma medida.

Se precisássemos responder quem tem razão sobre a medida, o melhor seria realizar uma média aritmética, que é a soma de todos os valores obtidos na medição dividida pelo número de medições efetuadas. Além disso, a incerteza também pode ser conhecida e trabalhada a partir da estatística de muitas medições. Se todos os operadores de um instrumento estiverem bem treinados e os instrumentos bem calibrados, as medidas estarão sujeitas apenas aos erros aleatórios de medida.

VAMOS PRATICAR

- O perímetro é a medida da distância ao redor da borda de uma figura plana, seja ela composta por lados retos ou por uma linha curva.

Uma empresa de construção civil foi contratada para construir uma piscina em um condomínio residencial. A forma da piscina deve ser retangular, com 12 metros de comprimento e 8 metros de largura. O condomínio solicitou que fosse construída uma cerca, distante 2 metros de cada lado da piscina, para garantir a segurança das crianças. Dessa forma, quantos metros de cerca serão necessários para cercar a piscina?

- Uma quantidade total que foi dividida em partes iguais pode ser representada por uma fração. Se uma pizza, por exemplo, for cortada ao meio, então a soma das duas metades fornece o todo. Cada uma das metades é representada pela fração $\frac{1}{2}$. Considere que uma pizza inteira foi dividida do seguinte modo: primeiro na metade, produzindo dois pedaços e, na sequência, apenas uma das metades foi dividida em duas partes, o que representa $\frac{1}{4}$ da pizza total. Assim, se juntarmos os dois $\frac{1}{4}$ da pizza, teremos novamente a metade, o que matematicamente representa $\frac{2}{4}$, correspondendo à metade da pizza original novamente.

Assinale a alternativa correspondente ao conceito envolvendo frações.

- a) Frações equivalentes.
 - b) Princípio fundamental da contagem.
 - c) Comutatividade da adição.
 - d) Soma de termos com radicais e índices iguais.
 - e) A existência de simétricos na reta real.
- Só podemos somar ou subtrair frações que possuam o mesmo denominador. Caso elas não possuam o mesmo denominador, precisaremos reduzir ao mesmo denominador para então operar sobre as frações.

Em um dos contos do livro “O homem que calculava”, um pai havia deixado 35 camelos como herança aos seus três filhos da seguinte maneira: metade iria para o filho mais velho, um terço para o filho do meio e um nono para o filho mais novo. Efetue a soma das frações envolvidas na divisão dos bens entre os irmãos.

VAMOS PRATICAR

4. Racionalizar uma fração cujo denominador é um radical significa achar uma fração equivalente a ela com denominador inteiro. Para isso, devemos multiplicar ambos os termos da fração por um número conveniente. Ainda podemos dizer que racionalizar uma fração significa reescrever a fração eliminando do denominador os radicais. Para eliminar a raiz do denominador, multiplicamos denominador e numerador pela raiz que já se encontra no denominador.

Com base no texto, assinale a alternativa que mostra corretamente como é a forma racionalizada da fração $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

VAMOS PRATICAR

5. No produto de potências de bases iguais, a base é conservada e os expoentes são somados. Na divisão de potências de bases iguais, a base é conservada e os expoentes são subtraídos.

Se a massa do Sol for da ordem de 10^{30} kg e a massa de um átomo de hidrogênio for de 10^{-27} kg , então, a divisão da massa do Sol pela massa do átomo de hidrogênio fornece: $\frac{10^{30}}{10^{-27}} = 10^{57}$, o que dá a ordem de grandeza dos átomos de H no Sol.

Analise as sentenças a seguir:

- I - Na operação mostrada, foi efetuada a divisão de potências de bases iguais.
- II - Não é possível efetuar o cálculo mostrado.
- III - O cálculo está incorreto pela regra de sinais.
- IV - O cálculo mostra a quantidade de átomos de H no Sol se os outros elementos forem desprezíveis.

É correto o que se afirma em:

- a) I e IV, apenas.
- b) II e III, apenas.
- c) III e IV, apenas.
- d) I, II e III, apenas.
- e) II, III e IV, apenas.

BONATTI, C. et al. **Introdução ao cálculo**. Indaiá: UNIASSELVI, 2015. Disponível em: <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.

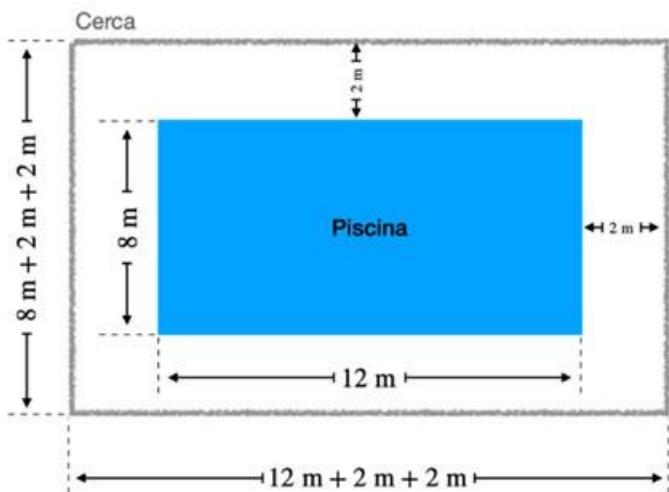
FINN, E. J.; ALONSO, M. **Física: Um curso universitário - Mecânica**. Brasil: Editora Blucher, 2018. Disponível em: <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.

ABDULACK, S. A. **Quantas moléculas de H₂O existem em uma gota d'água?** Exatas em foco. 2021. Disponível em: <https://exatasfoco.com/blog>. Acesso em: 16 abr. 2023.

STEWART, I. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014. Disponível em: <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Brasil: Record, 2013. Disponível em: <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.

1. Note professor(a) que para as duas dimensões apresentadas na piscina a cerca a ser construída deve estar ainda 2 metros distante. Sendo assim, para os 12 metros de comprimento da piscina, a cerca deverá ter 16 metros (2 metros a mais para cada lado), a largura por sua vez, deverá ter 12 metros (2 metros a mais para cada lado). Como queremos calcular o total do comprimento da cerca, ou ainda, o perímetro, devemos somar: $16\text{ m} + 16\text{ m} + 12\text{ m} + 12\text{ m} = 56\text{ m}$ (cf. Figura).



Observação: somamos duas vezes 16 e duas vezes 12, porque temos dois lados com estes comprimentos.

FÓRMULA:

Adição de números inteiros.

2. Opção A.
- a) O conceito de frações equivalentes consiste em frações escritas de maneira diferente, mas que correspondem à mesma quantidade. Assim, nesta questão, exige-se a interpretação do aluno de que o problema trata das frações e também que tomar uma parte de duas é equivalente a tomar duas partes em quatro.
 - b) Trata-se de um princípio da análise combinatória que nem mesmo é mencionado no texto do Tema 1. A situação proposta não tem relação com combinações de elementos, mas de analisar operações com frações.
 - c) A comutatividade da adição é uma propriedade dos números reais que garante que a soma dos números independe da ordem em que é efetuada. Não tem relação com o conceito apresentado no texto.

-
- d) A soma dos termos com radicais iguais e índices iguais é um conceito que envolve raízes e não está relacionado com as frações propostas pelo problema.
- e) Esta é uma propriedade dos números reais que garante a existência de um número negativo para cada positivo. Logo, não está relacionada ao texto da pergunta.

3. A soma das frações é: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$. Como elas não estão reduzidas ao mesmo denominador, é preciso calcular o mínimo múltiplo comum, que é 18 para este caso. Pela técnica de reduzir ao mesmo denominador, teremos as frações equivalentes: $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$, $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ e $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$. Somando tudo, temos: $\frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$.

FÓRMULA:

Soma de frações com denominadores distintos: as frações equivalentes.

4. Opção D.

Como temos apenas uma raiz quadrada no denominador, basta multiplicarmos numerador e denominador pela mesma raiz quadrada:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 5.
- a) Correta, pois foi realizada a divisão de potências de bases iguais, conservando a base 10 e subtraindo os expoentes. Além disso, a divisão da massa do Sol pela massa de um átomo de H, mostra quantos átomos de H cabem no Sol, embora precise assumir que a imensa fração de H seja maior do que de outros elementos.
- b) É possível realizar o cálculo e ele não está incorreto, pois $30 - (-27) = 30 + 27$.
- c) Embora o cálculo efetuado mostre a ordem de grandeza dos átomos de H no Sol, ele não está incorreto.
- d) A operação efetuada de fato é a da potência de bases iguais na divisão, mas pelo já exposto, o cálculo é possível e não está incorreto.
- e) É possível efetuar o cálculo, ele não está incorreto, embora forneça a ordem de grandeza dos átomos de H no Sol.



TEMA DE APRENDIZAGEM 2

MONÔMIOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

MINHAS METAS

- Classificar um polinômio quanto ao grau.
- Identificar um polinômio quanto ao número de termos.
- Aprender as operações básicas com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão.
- Aprender a fatoração de polinômios.
- Estudar as equações do primeiro grau, segundo grau, terceiro grau e quarto grau.

INICIE SUA JORNADA

Quando você deixa cair qualquer objeto em direção ao solo, se pudermos desprezar a resistência que o ar oferece, dizemos que ele está em queda livre. Em projetos térmicos, principalmente industriais, os engenheiros precisam trabalhar com os processos de trocas de calor.

O que há em comum entre a queda de um objeto e a situação da transferência de calor através das paredes de um forno industrial?

VAMOS RECORDAR?

Para este tema, é importante que você saiba trabalhar com as propriedades associativa, comutativa e distributiva. Que tal revisar? Acesse o QR Code e assista ao vídeo.

DESENVOLVA SEU POTENCIAL

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Uma equação é uma sentença matemática formada por meio de uma igualdade e contendo ao menos uma incógnita.

Incógnita é o valor que queremos saber de uma equação. A palavra “equação” tem sua origem no latim *æquatio*, que significa igualdade.

Encontrar o valor da incógnita em uma equação significa encontrar um conjunto de valores que tornam a sentença matemática verdadeira.

Estudante, um exemplo de equação que você estudará neste tema é:

$$2x - 4 = 0$$

O interesse principal nesse tipo de problema é calcular o valor de x que, em princípio, é desconhecido nessa equação e, por isso, o chamamos de incógnita, por se tratar de um valor desconhecido. Você verá também que um sinônimo para x é variável.

Calcular o valor de x nessa igualdade é encontrar o valor de x que torna a sentença $2x - 4 = 0$ verdadeira (LACHTERMARCHER; WAGNER, 2011).

Não é qualquer valor de x que satisfaz a equação, pois a instrução que ela nos fornece é: “subtraindo quatro unidades do dobro do número que não conhecemos resulta em zero”.

De modo completamente equivalente, poderíamos ter escrito $2x = 4$, ou $4 = 2x$, não importa a ordem.

De modo geral, uma equação polinomial é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 .$$

Os termos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são os coeficientes numéricos do polinômio.

Um polinômio é uma expressão algébrica de dois ou mais termos

Em outras palavras, é uma equação que envolve **polinômios** em uma variável. Para entender como tratar das equações polinomiais, vamos primeiro estudar o que é um polinômio e que tipo de operação podemos realizar. Um polinômio é uma expressão algébrica de dois ou mais termos.

Um produto de números reais, todos ou em parte sob representação literal, recebe o nome de **monômio** ou **termo algébrico**.

Todo monômio é composto por duas partes: o coeficiente numérico e a parte literal (formada por letras).

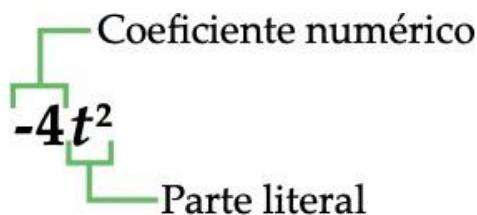


Figura 1 – O coeficiente numérico e a parte literal de um monômio / Fonte: adaptada de Bonatti et al. (2015).

Descrição da Imagem: na figura é mostrado o monômio $-4t^2$ empregando, com segmentos verdes explicativos, cujas legendas são: “coeficiente numérico”, para o -4 e “Parte literal”, para o t^2 .

Exemplos de monômios:

3

Todo número real é um monômio com parte literal inexistente.

$8x$

O coeficiente numérico é 8 e a parte literal é x.

$\frac{4}{5}b^2$

O coeficiente numérico é $\frac{4}{5}$ e a parte literal é b^2 .

$-3x^2y$

O coeficiente numérico é -3 e a parte literal é x^2y .

$-xyz$

O coeficiente numérico é -1 e a parte literal é xyz .

 $5t^2$

O coeficiente numérico é 5 e a parte literal é t^2 .

Em alguns cálculos, aparecem muitas vezes termos semelhantes. É ideal que você saiba reconhecê-los, pois pode simplificar as operações. Eles são termos que diferem apenas pelo coeficiente numérico.

$$7xy^3 - 2m + 9y^3x + 4m$$

Figura 2 – Operações com monômios: os termos em cores iguais são semelhantes, diferindo apenas pela parte numérica / Fonte: autor.

Descrição da Imagem: na figura são mostrados os monômios $7xy^3$ e $9y^3x$ (em vermelho), $-2m$ e m (em azul). O polinômio é construído com a soma desses monômios.

Observe, na Figura 2, que os termos em cores iguais são semelhantes entre si, de acordo com a definição: apenas o coeficiente numérico muda de um termo para o outro: a parte literal é igual.

Após esse primeiro contato, estudaremos as operações com os monômios.

Adição e subtração de monômios

A Figura 2 apresenta a adição dos monômios $7xy^3$ e $9y^3x$, ao mesmo tempo em que se tem a soma do monômio $4m$ com o monômio $-2m$. Podemos efetuar a adição e subtração de monômios, mas apenas com aqueles termos que possuam parte literal comum, ou seja, monômios só podem ser somados ou subtraídos se forem semelhantes.

Para operar sobre os monômios na adição e subtração, conservamos a parte literal comum e operamos os coeficientes numéricos.

Ainda com base na Figura 2, pela regra supracitada teremos:

$$7xy^3 - 2m + 9y^3x + 4m = 16xy^3 + 2m$$

Figura 3 – Adição e subtração de monômios / Fonte: autor.

Descrição da Imagem: na figura são mostrados os monômios $7xy^3$ e $9y^3x$ (em vermelho), $-2m$ e $4m$ (em azul). O resultado é obtido com a soma desses monômios. Os termos com cores iguais podem ter os seus coeficientes numéricos somados, mantendo-se a parte literal.

Perceba que $7+9=16$ que são os coeficientes da parte literal xy^3 (monômio em vermelho), e $-2+4=2$, que são os coeficientes da parte literal m (monômio em azul).

Acompanhe na sequência alguns exemplos.

$$2a + 7a = 9a$$

Os monômios apresentam a mesma parte literal, então basta somar os termos numéricos: $2+7=9$, mantendo a parte literal a .

$$5x - 2x = 3x$$

Os monômios aqui também apresentam a mesma parte literal, então basta subtrair os coeficientes numéricos: $5-2=3$, mantendo a parte literal.

$$10ab - 9ba = 1ab$$

Os monômios são semelhantes, pois apresentam a mesma parte literal, que é o produto ab , que é o mesmo que o produto ba . Então, mantemos a parte literal e subtraímos os coeficientes numéricos: $10-9=1$.

$$5x + 3x - 2x = 6x$$

Os três monômios que aparecem são semelhantes. Basta manter a parte literal e efetuar as operações indicadas com os coeficientes numéricos: $5+3-2=6$.

$$2x + 3y + 3x - 2y = 5x - 1y$$

Neste caso, o resultado ficará com dois termos, pois não é possível reduzí-los a apenas um. Efetuamos as operações indicadas entre os monômios semelhantes, mantendo a parte literal em comum e operando sobre os coeficientes numéricos.

Para x: $2 + 3 = 5$

Para y: $3 - 2 = 1$

Com relação aos exemplos “c” e “e”, note que deixamos o resultado como $1ab$ e $1y$, respectivamente, com o número 1 explícito para evidenciar as operações com os coeficientes. Muitas vezes, no entanto, você vai encontrar esse resultado como simplesmente o produto ab , o que é equivalente

Para finalizarmos com a adição e a subtração de monômios, o que acontece caso os termos sejam iguais?

$$2x - 2x = 0$$

Se os termos são idênticos, então a subtração entre eles é zero. Pense no x como sendo uma maçã. Se você tem duas maçãs e come essas maçãs, então não sobram mais maçãs.

Multiplicação e divisão de monômios

Ao **multiplicar monômios**, devemos seguir os seguintes passos:

1. realizar a regra de sinal, quando necessário;
2. multiplicar os coeficientes numéricos;
3. quando houver parte literal igual, devemos aplicar a propriedade da multiplicação de bases iguais, conservando a base e somando os expoentes.

Acompanhe, na sequência, alguns exemplos.

a) $2x \cdot 3x = 6x^2$

b) $2x \cdot 3y = 6xy$

c) $4xy \cdot 7xy^2 = 28x^2y^3$

d) $4ab \cdot (-5z) = -20abz$

e) $-10a^2b \cdot 9a^2b^3 = -90a^4b^4$

f) $\frac{2}{3}t^2 \cdot \frac{5}{4}tv^3 = \frac{10}{12}t^3v^3 = \frac{5}{6}t^3v^3$

$$\frac{28x^4}{4x} = 7x^3$$

Ao **dividir monômios**, devemos seguir os seguintes passos:

1. Realizar a regra de sinal, quando necessário;
2. Dividir os coeficientes numéricos;
3. Quando houver parte literal igual, devemos conservá-la e subtrair os expoentes. Ou seja, devemos aplicar a propriedade da divisão de bases iguais.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $9x \div 3x = 3x^0 = 3 \cdot 1 = 3$

$$\begin{aligned}\frac{9x^1}{3x^1} &= 3x^{1-1} \\ &= 3x^0 \\ &= 3 \cdot 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

b) $28x^4 \div 4x = 7x^3$

$$\begin{aligned}\frac{28x^4}{4x^1} &= 7x^{4-1} \\ &= 7x^3\end{aligned}$$

c) $4x^3y^2 \div (-2x^2y) = -2xy$

$$\begin{aligned}\frac{4x^3y^2}{-2x^2y} &= -\frac{4x^3y^2}{2x^2y} \\ &= -2x^{3-2}y^{2-1} \\ &= -2xy\end{aligned}$$

d) $(-20a^5bc) \div (-5a^3b) = 4a^2b^0c = 4a^2c$

$$\begin{aligned}\frac{-20a^5bc}{-5a^3b} &= \frac{20a^5bc}{5a^3b} \\ &= 4a^{5-3}b^{1-1}c \\ &= 4a^2b^0c \\ &= 4a^2c\end{aligned}$$

e) $-10a^2b \div 2a^2b^3c = -5a^0b^{-2}c^{-1} = 5b^{-2}c^{-1}$ ou $-\frac{5}{b^2c}$

$$\begin{aligned}\frac{-10a^2b}{2a^2b^3c} &= -\frac{10a^2b}{2a^2b^3c} \\ &= -5a^{2-2}b^{1-3}c^{0-1} \\ &= -5a^0b^{-2}c^{-1} \\ &= -5b^{-2}c^{-1} \\ &= -\frac{5}{b^2c}\end{aligned}$$

$$f) \frac{\frac{2}{3}t^2 \div \frac{5}{3}tv^3}{4} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) t^1 v^{-3} = \frac{8}{15} tv^{-3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}t^2}{\frac{5}{4}tv^3} = \left| \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right| \cdot \frac{t^2}{tv^3}$$

$$= \frac{8}{15} \cdot t^{2-1} v^{0-3} \\ = \frac{8}{15} \cdot tv^{-3}$$

Acompanhe, na sequência, um resumo da nomenclatura vista até aqui.

Polinômios

Monômios, Binômios e
Trinômios

1

MONÔMIO

Com um único termo, temos o monônio, que você acabou de estudar.

$$3xy^2$$

2

BINÔMIO

Com dois termos, temos o binômio.

$$3xy^2 + 2xy$$

3**TRINÔMIO**

Agora com três termos (veja que são três monômios), temos um trinômio:

$$3xy^2 + 2xy + 1$$

4**POLINÔMIO**

Quatro termos ou mais não tem um nome especial. São polinômios mesmo.

$$3xy^2 + 2xy + x - 1$$

Adição e subtração de polinômios

Você estudou até agora os monômios e as operações com os monômios. Como você viu, polinômio é o nome que se dá quando se tem um monômio com mais de dois termos.

APROFUNDANDO

O grau de um polinômio não nulo é definido como sendo o maior expoente da variável com coeficiente não nulo. Por exemplo, o polinômio definido como $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ apresenta grau 4, pois é o maior expoente de x .

Para somar e subtrair polinômios, devemos seguir a mesma regra da adição e da subtração de monômios, apresentada na Figura 2 e na Figura 3.

Considere, como exemplo, os polinômios $-2x^2 + 5x - 2$ e $-3x^3 + 2x - 1$. Vamos efetuar a adição e a subtração entre eles:

$$\begin{aligned}(-2x^2 + 5x - 2) + (-3x^3 + 2x - 1) &= -2x^2 + 5x - 2 - 3x^3 + 2x - 1 \\&= -3x^3 - 2x^2 + 7x - 3\end{aligned}$$



EU INDICO

assista ao vídeo, em que é mostrada uma aplicação geométrica da adição e da subtração de polinômios.

Multiplicação de polinômios

Para efetuar a multiplicação de polinômios, procedemos de modo similar à multiplicação de monômios. Contudo, agora a **propriedade distributiva** deve ser levada em consideração:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Acompanhe os exemplos seguintes da **multiplicação de um monômio por um polinômio**.

a) $3x^2 \cdot (5x^3 + 8x^2 - x) = 3x^2 \cdot 5x^3 + 3x^2 \cdot 8x^2 - 3x^2 \cdot x$
 $= 15x^5 + 24x^4 - 3x^3$

b) $4x \cdot (2x - 3y) = 4x \cdot 2x - 4x \cdot 3y$
 $= 8x^2 - 12xy$

c) $(-7a^3b^3 + 4a^2b^2 - 9ab^3) \cdot (-3ab) = (-7a^3b^3) \cdot (-3ab) + (4a^2b^2) \cdot (-3ab) + (-9ab^3) \cdot (-3ab)$
 $= 21a^4b^2 - 12a^3b^3 + 27a^2b^4$

A multiplicação de **polinômio por polinômio** também deve levar em consideração a **propriedade distributiva**. Acompanhe, na sequência, os exemplos.

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+2) \cdot (x-3) &= x \cdot x + x \cdot (-3) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-3) \\ &= x^2 - 3x + 2x - 6 \\ &= x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x+y) \cdot (5x^2 - 2y) &= 3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot (-2y) + y \cdot 5x^2 + y \cdot (-2y) \\ &= 15x^3 - 6xy + 5x^2y - 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (-2a+b) \cdot (3a+2ab-5) &= -2a \cdot 3a + (-2a) \cdot 2ab + (-2a) \cdot (-5) + b \cdot 3a + b \cdot 2ab + b \cdot (-5) \\ &= -6a^2 - 4a^2b + 10a + 3ab + 2ab^2 - 5b \end{aligned}$$

Você estudou o produto de polinômios. Lembre-se que uma potência é um produto de um termo por ele mesmo, de modo que as mesmas operações e propriedades são válidas.

Produtos notáveis

Existem alguns termos que aparecem com mais frequência e que podemos resolvê-los de modo prático para simplificar o cálculo.

A) QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

$$\text{Distributiva: } (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

Como ab é comum com ba , então podemos somar estes termos e resulta em:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} (x+5y)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 \\ &= x^2 + 10xy + 25y^2 \end{aligned}$$

B) QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b) \cdot (a-b) \\&= a^2 - ab - ba + b^2 \\&= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}(x^3 - 4)^2 &= (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 4 + (-4)^2 \\&= x^6 - 8x^3 + 16\end{aligned}$$

C) PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b) \cdot (a-b) \\&= a^2 - ab + ba - b^2 \\&= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}(3t^2 + 2) \cdot (3t^2 - 2) &= (3t^2)^2 - 2^2 \\&= 9t^4 - 4\end{aligned}$$

No cálculo da velocidade média e da velocidade instantânea, por exemplo, ocorrem expressões como: $5t^2 - 5t_0^2$, que podem ser fatoradas como $5(t + t_0) \cdot (t - t_0)$ para simplificar os cálculos provenientes da definição de velocidade (HALLIDAY, 2016; NUSSENZVEIG, 2013).

Divisão de polinômios

Para efetuar a divisão de um polinômio por um monômio, assim como na multiplicação, transformamos em duas ou mais divisões de monômios.

$$\begin{aligned}a) \quad (8x^5 - 6x^3) \div (2x) &= 8x^5 \div (2x) - 6x^3 \div (2x) \\&= 4x^4 - 3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (15y^3 - 4y^2) \div (-5y) &= 15y^3 \div (-5y) - 4y^2 \div (-5y) \\ &= -3y^2 + \frac{4}{5}y \end{aligned}$$

A divisão de polinômios é composta por dividendo, divisor, quociente e resto, assim como a divisão de números naturais, mas no caso da divisão de polinômio por polinômio, cada termo é formado por mais de um monômio.

Vamos apresentar um exemplo e resolvê-lo pelo método da chave.

Considere a divisão do polinômio $2x^2 - 5x - 12$ pelo polinômio $x - 4$.

Inicialmente, devemos escrevê-lo na seguinte forma:

$$2x^2 - 5x - 12 \quad |x - 4$$

O objetivo é zerar sempre o primeiro termo do polinômio. Para isso, dividiremos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, isto é, $2x^2 \div x = 2x$. O resultado encontrado deve ser multiplicado pelo polinômio $x - 4$, que é o divisor:

$$2x \cdot (x - 4) = 2x^2 - 8x$$

O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $2x^2 - 5x - 12$, que é o dividendo.

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -5x \quad -12 \quad |x - 4 \\ -2x^2 \quad -8x \quad \quad \quad 2x \end{array}$$

Ou seja:

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -5x \quad -12 \quad |x - 4 \\ -2x^2 \quad +8x \quad \quad \quad 2x \end{array}$$

Juntando os termos semelhantes e abaixando o -12:

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^2} & -5x & -12 & |x-4 \\ \cancel{-2x^2} & +8x & : & 2x \\ & 3x & -12 & \end{array}$$

Agora, considerando o polinômio $3x - 12$, repetiremos o processo, dividindo $3x$ por

x :

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^2} & -5x & -12 & |x-4 \\ \cancel{-2x^2} & +8x & : & 2x+3 \\ & 3x & -12 & \\ & -(+3x & -12) & \end{array}$$

Removendo os parênteses e efetuando a regra de sinais:

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^2} & -5x & -12 & |x-4 \\ \cancel{-2x^2} & +8x & : & 2x+3 \\ \cancel{3x} & \cancel{-12} & & \\ -(+3x & \cancel{-12}) & & \\ & 0 & & \end{array}$$

Assim, $(2x^2 - 5x - 12) \div (x - 4) = 2x + 3$ e o resto é zero.

Anteriormente, quando tratamos dos produtos notáveis, mencionamos o exemplo da velocidade média e da velocidade instantânea. Vamos entender como isto se relaciona com o assunto deste tema.

Na queda livre, um objeto cai com aceleração constante. A equação que relaciona a posição vertical do objeto, y , com o tempo, t , é a equação horária da posição, que, neste caso, pode ser escrita como: $y = 10 - 5t^2$, assumindo por simplicidade que o objeto foi solto de uma altura inicial de 10 metros e a aceleração da gravidade é aproximadamente 10 m/s^2 .

De um modo ainda impreciso, definimos a velocidade como rapidez com que algo se move (HEWITT, 2011). A velocidade média só pode ser definida entre dois instantes. Assim, não podemos dizer a velocidade média em um instante específico, mas em um intervalo (NUSSENZVEIG, 2013; GUIDORIZZI, 2015).

No exemplo da queda livre, podemos definir a velocidade média com o chamado **quociente de Newton**: é a variação de posição dividida pela variação do tempo. Um móvel é mais rápido do que o outro se percorrer uma distância maior em um mesmo tempo. Matematicamente:

$$v_m = \frac{y - y_0}{t - t_0},$$

em que y_0 é a posição que o móvel ocupou no instante t_0 e y é a posição que o móvel ocupa no instante t .

Vamos expressar a velocidade média entre os instantes $t = 1$ s e qualquer outro instante posterior, que representaremos pela parte literal t .

Pela definição de velocidade média, teremos:

$$v_m = \frac{5t^2 - 5 \cdot 1^2}{t - 1}$$

Como o número 5 é fator comum, podemos colocá-lo em evidência, ficando com:

$$v_m = 5 \frac{t^2 - 1}{t - 1}.$$

Observe que temos agora uma divisão de polinômios. Neste caso, escrevemos o numerador como o produto da soma pela diferença, estudado nos produtos notáveis:

$$v_m = 5 \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t-1},$$

desde que $t \neq 1$ s.

Se $t \neq 1$, então podemos simplificar, que corresponde ao mesmo resultado da divisão do polinômio $t^2 - 1$ pelo polinômio $t - 1$, o que resulta em:

$$\begin{aligned}v_m &= 5 \cdot (t + 1) \\&= 5t + 5\end{aligned}$$

A velocidade média de um objeto em queda livre entre os instantes $t = 1$ s e qualquer outro instante posterior antes de chegar ao chão é, portanto, $5t - 5$ (m/s).

Em particular, se escolhermos agora o instante $t = 1$ s, teremos a velocidade instantânea do objeto em movimento: $v(1) = 5 \times 2 = 10$ m/s.

Você pode perceber isto calculando o quociente de Newton mostrado para valores de tempo cada vez mais próximos de 1, como mostra a Tabela 1. De modo equivalente, isso é o mesmo que tomar intervalos de tempo bem pequenos, em relação ao instante inicial $t_0 = 1$ s.

TEMPO (S)	INTERVALO (S)	VELOCIDADE MÉDIA (M/S)
1,1	$1,1 - 1 = 0,1$	10,5
1,01	$1,01 - 1 = 0,01$	10,05
1,001	$1,001 - 1 = 0,001$	10,005
1,0001	$1,0001 - 1 = 0,0001$	10,0005

Tabela 1 – O cálculo da velocidade média para intervalos pequenos / Fonte: o autor.

Equações do primeiro grau

As equações do primeiro grau (ou linear) são equações compostas por coeficientes e uma variável cujo expoente é igual a um.

As equações do primeiro grau, ou lineares, são aquelas que podem ser representadas por meio da forma

$$ax + b = 0,$$

em que tanto $a \neq 0$ quanto b são números reais e x é a variável.

Caso o coeficiente a não fosse zero, então teríamos $0 + b = 0$. Porém, b é um coeficiente real e pode assumir qualquer valor e não necessariamente zero.

Uma equação do tipo $2x + 3 = 0$ é uma equação do primeiro grau, com $a = 2$ e $b = 3$. A equação $3x - 5 = 0$ é uma equação do primeiro grau, com $a = 3$ e $b = 5$. Outro exemplo é a velocidade média que vimos anteriormente, se fixarmos um valor para a velocidade média: $5t + 5 = 10$, em que $a = 5$ e $b = -5$, pois para identificar os coeficientes, é necessário escrevermos a equação na forma padrão, o que fica:

$$\begin{aligned} 5t + 5 &= 10 \\ 5t + 5 - 10 &= 0 \\ 5t - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Por exemplo, a equação $2x - 3 = x + 4$ não está na forma padrão, mas é possível transformá-la, efetuando as operações necessárias com o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Isso significa que é sempre possível somar, subtrair, multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação pelo mesmo número sem alterar a igualdade.

Nesse caso, precisamos unir os termos em um membro da equação. Podemos subtrair x e subtrair 4 de ambos os membros da equação $2x - 3 = x + 4$ para ficarmos com:

$$\begin{aligned} 2x - x - 3 - 4 &= 0 \\ x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

que é a forma padrão da equação do primeiro grau.

Agora, vamos aplicar esse princípio na forma geral da equação do primeiro grau:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Este valor de x é o único valor que torna a sentença verdadeira. Ele recebe o nome especial de **raiz da equação**, pois é o valor que torna a equação igual a zero.

Vamos exemplificar com outra situação física. Você filma o movimento de um carro e marca o tempo que leva para o carro atingir determinadas posições.

Se o carro mantiver esse movimento, podemos estabelecer uma relação entre o tempo e a posição e podemos descobrir onde o carro está em cada tempo.

Vamos imaginar que t é o tempo e x é a posição do carro do exemplo. Uma equação que pode descrever esse movimento é:

$$x = 10t$$

Agora, podemos perguntar o seguinte: quando o carro se deslocou 40 metros do início do movimento, quanto tempo havia sido marcado no cronômetro?

Nesse caso, escrevemos que não sabemos quanto vale t , mas sabemos resolver uma equação do primeiro grau:

$$\begin{aligned} 40 &= 10t \\ 10t &= 40 \\ t &= \frac{40}{10} \\ t &= 4 \text{ s} \end{aligned}$$

Note, estudante, que se trata de um processo de encontrar a raiz da equação $10t - 40 = 0$.

Equações do segundo grau

As equações do segundo grau, também chamadas de equações quadráticas, são compostas por coeficientes e uma variável cujo maior expoente é igual a dois.

Assim, chamamos de equação quadrática toda equação da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

em que $a \neq 0$, b e c são coeficientes reais, e x é a variável.

Observe que, caso $a = 0$, então teríamos $bx + c = 0$, que não é uma equação do segundo grau, mas do primeiro grau.

Considere a equação:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Compare com a forma padrão e veja que $a = 2, b = -5, c = 3$.

Como outro exemplo, considere a equação $x^2 - 5x + 3 = 0$. Nesse caso, $a = 1, b = -5$ e $c = 3$.

A equação $x^2 + 7x - 4 = 10$ é do segundo grau. Para identificarmos os termos, assim como trabalhamos com as equações acima e do primeiro grau, precisamos colocá-la na forma padrão, subtraindo 10 de ambos os lados da equação:

$$x^2 + 7x - 4 - 10 = 0$$

$$x^2 + 7x - 14 = 0$$

Assim, $a = 1, b = 7$ e $c = -14$.

Quando Galileu Galilei (1564 - 1642) estudou a queda livre, havia alguns impedimentos: quando um objeto é solto em queda livre de uma altura pequena, a velocidade que o corpo adquire atrapalha na medida do tempo de queda, porque é tudo muito rápido. Esse problema é contornado quando olhamos para o plano inclinado.

Queda livre é o movimento de alguma coisa, algum objeto que é solto de alguma altura e cai, sem nenhuma resistência, apenas sob a influência da gravidade.

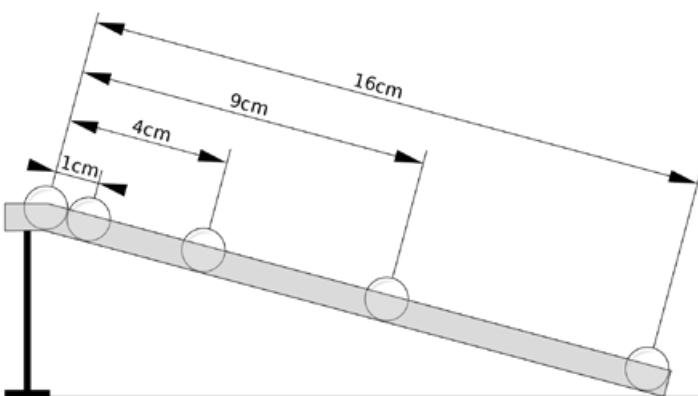


Figura 4 – Representação esquemática de uma bola que desce por um plano inclinado / Fonte: <https://upload.wikimedia.org/commons/a/a7/Inclined-plane-experiment.svg>. Acesso em: 20 jul. 2023.

Descrição da Imagem: a figura mostra uma rampa esquematicamente. Uma espécie de apoio preto sustenta o início da rampa que está inclinada. A rampa é cinza e é reta até o chão, formando um triângulo retângulo. Uma esfera é desenhada em cinco posições distintas ao longo da rampa com as marcações em preto de 1 cm, 4 cm, 9 cm e 16 cm.

Como a taxa de aumento da velocidade é pequena no plano inclinado, então, as variáveis dinâmicas nesta escala são mais fáceis de serem medidas. É a gravidade que atua na esfera, no plano inclinado, mas a aceleração da esfera é apenas uma parte da aceleração da gravidade.

Em um dos experimentos de Galileu, ele marcou uma esfera com tinta e a deixou rolar pelo plano inclinado, deixando marcas ao longo deste. O que ele verificou é que o espaçamento entre as marcas aumentava com o passar do tempo.

De um modo mais preciso, ele percebeu uma relação de dependência da distância com o tempo de acordo com o monômio:

$$d = t^2$$



Considere agora o lançamento de um projétil. Ao invés de soltar um objeto, você o arremessa para cima. Quanto tempo demora para ele retornar?

As raízes (ou soluções) de uma equação do segundo grau são os valores que, atribuídos à variável, tornam a sentença verdadeira. Por exemplo, 3 é a raiz da equação do segundo grau $x^2 - 5x + 6 = 0$, pois $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$.

Existe uma fórmula que permite encontrar as raízes de uma equação do segundo grau completa ou incompleta. Aqui no Brasil é conhecida popularmente como a Fórmula de Bháskara, por associá-la ao matemático hindu homônimo. A fórmula resolutiva da equação do segundo grau é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que são as raízes da equação, ou seja, temos duas soluções para a equação do segundo grau.

A expressão $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ é um número real que pode ser representado pela letra grega \mathcal{D} (delta maiúscula).

O valor do \mathcal{D} determina o número de raízes de uma equação do segundo grau.

- $\mathcal{D} > 0$: a equação possui duas raízes reais e diferentes.
- $\mathcal{D} = 0$: a equação possui duas raízes iguais e reais (mesmo valor).
- $\mathcal{D} < 0$: a equação não possui raízes reais.

Um aspecto importante que ocorre nas equações polinomiais e é facilmente verificável para as equações do segundo grau são as chamadas **relações de Girard**.

Considere que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\mathcal{D}}}{2a}$ é a primeira raiz da equação do segundo grau e que $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\mathcal{D}}}{2a}$ é a segunda raiz.

Calculando a **soma** dessas raízes, obtemos:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \\&= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \\&= -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} \\&= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Calculando o **produto** dessas raízes, obtemos:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \right) \\&= \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \right) \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \right) \\&= \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b\sqrt{\mathcal{D}}}{4a^2} - \frac{b\sqrt{\mathcal{D}}}{4a^2} - \frac{\mathcal{D}}{4a^2} \\&= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\&= \frac{4ac}{4a^2} \\&= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Este método é chamado de **soma e produto**.

Considere como exemplo a equação do segundo grau $x^2 - 2x + 1 = 0$. Neste caso, $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. Vamos usar o método da soma e produto para encontrar as raízes desta equação.

De acordo com o exposto anteriormente, a soma das raízes é

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

ou seja,

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2.$$

O produto das raízes é: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, ou seja,

$x_1 \cdot x_2 = 1$. As raízes, portanto, são dois números cuja soma é 2 e cujo produto é 1. Podemos concluir, intuitivamente, que esses números são 1 e 1. Logo, a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$ tem 1 como raiz de multiplicidade 2.

Vamos imaginar que uma bola seja arremessada para cima com velocidade inicial de 10 m/s. Ela começa a ser desacelerada pela gravidade e quando chegar ao ponto mais alto, ela para e então começa a cair, acelerada pela gravidade.

A equação que descreve esta situação é uma equação do segundo grau:

$$y = 10t - 5t^2$$

em que y representa a posição (altura) da bola.

Com a equação montada, podemos encontrar a altura para qualquer tempo: basta substituir o valor de t .

Também dessa maneira, podemos chamar a altura $y = 0$ e teremos uma equação do segundo grau:

$$10t - 5t^2 = 0$$

Como essa equação não apresenta termo independente, apenas termos que dependem de t , então não é necessário aplicar a fórmula quadrática, mas pode-

mos usar as propriedades para fatorar o polinômio, colocando o t em evidência, já que ele é fator comum nos dois monômios:

$$t(10 - 5t) = 0$$

A primeira solução é quando $t = 0$, pois teremos:

$$0 \cdot (10 - 5t) = 0$$

A segunda solução é quando t não for zero, mas o termo entre parênteses for zero:

$$10 - 5t = 0$$

O problema agora foi reduzido a uma equação do primeiro grau em t :

$$5t = 10$$

$$t = \frac{10}{5}$$

$$t = 2$$

Então, tirando o momento do lançamento ($t = 0$) em que a altura é nula, o outro momento em que isso acontece é em $t = 2$ s. Logo, leva 1 segundo para a bola subir e 1 segundo para a bola descer.

Este mesmo exemplo poderia ter sido resolvido pela fórmula resolutiva. A equação $10t - 5t^2 = 0$ apresenta $a = -5$, $b = 10$ e $c = 0$.

$\mathcal{D} = 10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 = 100 > 0$, logo apresenta duas raízes reais.

Pela fórmula resolutiva:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \cdot$$

O primeiro instante é:

$$t_1 = \frac{-10 + \sqrt{100}}{2 \cdot (-5)} = 0.$$

Já o segundo instante vale:

$$\begin{aligned}t_2 &= \frac{-10 - \sqrt{100}}{2 \cdot (-5)} \\&= \frac{-10 - 10}{-10} \\&= \frac{-20}{-10} \\&= 2\end{aligned}$$

Como outro exemplo, considere a equação completa $x^2 - 2x - 8 = 0$. Nesse caso, $a = 1, b = -2$ e $c = -8$.

Então:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\&= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \\&= 4 + 32 \\&= 36\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D} > 0$, então existem duas raízes reais. Pela fórmula resolutiva:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2 \cdot a} \\&= \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{2 \pm 6}{2}\end{aligned}$$

Portanto, as duas soluções são:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{2+6}{2} \\&= \frac{8}{2} \\&= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'' &= \frac{2-6}{2} \\
 &= \frac{-4}{2} \\
 &= -\frac{4}{2} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Equações do terceiro grau

As equações do 3º grau, também chamadas de equações cúbicas, são compostas por coeficientes e uma variável cujo maior expoente é igual a três.

De um modo geral, definimos uma equação do terceiro grau como: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, em que a, b, c e d são números reais, mas $a \neq 0$.

As raízes de uma equação do 3º grau são os valores que atribuídos à variável x tornam a sentença verdadeira. Os procedimentos mais comuns para encontrar as raízes de uma equação do 3º grau combinam o uso das Relações de Girard, do Teorema das Raízes Racionais, da divisão de polinômios, da redução de ordem da equação entre outros. Vamos estudar agora cada um desses métodos.

• REDUÇÃO DA ORDEM DA EQUAÇÃO

O método da redução de ordem da equação de 3º grau para 2º grau ou 1º grau deve ser utilizado quando o termo independente, ou seja, o termo sem a variável for inexistente na equação. Você viu algo semelhante no exemplo anterior da bola lançada para cima.

Esse método consiste em fatorar a equação, colocando em evidência a variável x que possui o menor expoente.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

Note que, agora temos o fator x sendo multiplicado pelo fator $x^2 - 5x + 6$ resultando em zero. Já sabemos que, quando dois fatores são multiplicados e o resultado dá zero, obrigatoriamente um deles deve ser zero. Então, nesse caso,

ou $x = 0$ e aqui já encontramos uma raiz, ou $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sabemos resolver essa equação do segundo grau pelos métodos vistos anteriormente. A resolução é feita por meio da fórmula resolutiva, com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, resultando em: $\mathcal{D} = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Logo:

$$x_1 = \frac{-(-5) + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, as raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ são 0, 2 e 3.

▪ DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Podemos aplicar a ideia da divisão de polinômios para resolver as equações do terceiro grau.

Existem outros métodos analíticos, mas o foco agora é uma base intuitiva e de como podemos aplicar conhecimentos algébricos para facilitar a resolução.

Considere a equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$. Um método completamente válido para encontrar a raiz é por tentativa e erro, que consiste em inspecionar a equação e lançar mão de um valor que torne a sentença verdadeira.

Aqui, $x = 1$ é um desses valores, pois veja que

$$1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 0$$

Assim, com certeza $x = 1$ é uma raiz desta equação.

Agora, vamos para as outras raízes pelo método da divisão dos polinômios. Como 1 é uma raiz do polinômio $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$, então um teorema garante que este polinômio é divisível por $x - 1$.

Vamos então dividir os polinômios:

$$\begin{array}{r} x^3 & -4x^2 & -7x & +10 \\ & \underline{|x-1} \end{array}$$

Observe:

$$\begin{array}{r}
 x^3 & -4x^2 & -7x & +10 & |x-1 \\
 -x^3 & & +x^2 & & x^2 \\
 0 & -3x^2 & -7x & +10 &
 \end{array}$$

Note que, quando colocamos o termo x^2 no quociente, ele será multiplicado tanto por x quanto por -1 . Quando multiplicarmos x^2 por x , obteremos x^3 . Esse valor vai subtrair do dividendo. Da mesma forma, quando multiplicarmos x^2 por -1 , obtemos $-x^2$. Esse valor também vai subtrair do dividendo, portanto $-(-x^2)$.

Agora, precisamos zerar o termo $-3x^2$. Para isso, é necessário multiplicar o termo, do divisor, por $-3x$ e repetir o processo de forma análoga ao que já foi feito.

$$\begin{array}{r}
 x^3 & -4x^2 & -7x & +10 & |x-1 \\
 -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 3x \\
 0 & -3x^2 & -7x & +10 & \\
 & 3x^2 & -3x & & \\
 0 & & -10x & +10 &
 \end{array}$$

Ainda precisamos zerar o termo $-10x$. Repetindo o processo, teremos:

$$\begin{array}{r}
 x^3 & -4x^2 & -7x & +10 & |x-1 \\
 -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 3x - 10 \\
 0 & -3x^2 & -7x & +10 & \\
 & 3x^2 & -3x & & \\
 0 & -10x & +10 & & \\
 & 10x & -10 & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

Agora, para encontrar as outras raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ basta resolvemos a equação correspondente ao polinômio do quociente, ou seja, $x^2 - 3x - 10 = 0$. Pelos métodos vistos anteriormente, chegamos que as raízes da equação do segundo grau $x^2 - 3x - 10 = 0$ são -2 e 5 .

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ são 1, -2 e 5.

As raízes do polinômio quociente, neste caso, são encontradas por meio da equação do segundo grau: $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\mathcal{D} = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$\mathcal{D} = 9 + 40$$

$$\mathcal{D} = 49 > 0$$

O problema apresenta soluções reais. Empregando a fórmula quadrática, obtemos:

$$x' = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x' = \frac{3+7}{2} \Leftrightarrow x' = \frac{10}{2} \therefore x' = 5$$

$$x'' = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x'' = \frac{3-7}{2} \Leftrightarrow x'' = -\frac{4}{2} \therefore x'' = -2$$

Logo, as raízes de $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ são $x = 1$, que já havíamos encontrado, $x = -2$ e $x = 5$.

▪ RELAÇÕES DE GIRARD

As relações de Girard correspondem às relações existentes entre os coeficientes de uma equação e as suas raízes.

Nas equações do 2º grau, já vimos este tipo de relação quando tratamos da soma e do produto.

Considerando que x_1 , x_2 e x_3 são as três raízes de uma equação do terceiro grau. Valem as relações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

Consideremos como exemplo a equação do terceiro grau que resolvemos:
 $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$.

Encontramos que $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 5$. Vamos observar que $a = 1$, $b = -4$, $c = -7$ e $d = 10$.

Vamos verificar então as relações de Girard para esta equação:

$$\begin{aligned} 1 + (-2) + 5 &= \frac{-(-4)}{1} \\ 1 \cdot (-2) \cdot 5 &= -\frac{10}{1} \\ 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 5 &= -\frac{7}{1} \end{aligned}$$

E isto verifica as três relações de Girard.

■ TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

O teorema das raízes racionais nos permite fazer uma listagem de todas as possíveis raízes de uma equação do 3º grau com coeficientes inteiros. Tal teorema nos diz que se a forma p/q é raiz de um polinômio então o termo independente, d , é divisível pelo numerador p , e o coeficiente de x^3 é divisível por q .

Apesar de o teorema ser válido para equações polinomiais de graus maiores, vamos aplicar ele ao problema de encontrar as raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, então pelo teorema das raízes racionais, p deve dividir 6 e q deve dividir 1. Logo, os possíveis valores de p e q são:

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ ou } \pm 6$$

$$q = 1.$$

Portanto, as possíveis raízes são: $\frac{\pm 1}{1} = \pm 1$, $\frac{\pm 2}{1} = \pm 2$, $\frac{\pm 3}{1} = \pm 3$ ou $\frac{\pm 6}{1} = \pm 6$.

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Vamos substituir os valores encontrados acima na equação e verificar quais deles são de fato raízes.

- $x = 1 : 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$, logo 1 é raiz da equação;
 - $x = -1 : (-1)^3 - 7 \cdot (-1) + 6 = -1 + 7 + 6 = 12$, logo -1 não é raiz da equação;
 - $x = 2 : 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$, logo 2 é raiz da equação;
 - $x = -2 : (-2)^3 - 7 \cdot (-2) + 6 = -8 + 14 + 6 = 12$, logo -2 não é raiz da equação;
 - $x = 3 : 3^3 - 7 \cdot 3 + 6 = 27 - 21 + 6 = 12$, logo 3 não é raiz da equação;
 - $x = -3 : (-3)^3 - 7 \cdot (-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0$, logo -3 é raiz da equação;
 - $x = 6 : 6^3 - 7 \cdot 6 + 6 = 216 - 42 + 6 = 180$, logo 6 não é raiz da equação;
 - $x = -6 : (-6)^3 - 7 \cdot (-6) + 6 = -216 + 42 + 6 = -168$, logo -6 não é raiz da equação.
- Portanto, as raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ são 1, 2 e -3.

A equação que resolvemos de três modos distintos poderia muito bem representar a maneira como a velocidade de um carro muda com o tempo em algum percurso, ou seja, vamos trocar o x por t apenas para representar o tempo e v a velocidade do carro:

$$v = t^3 - 4t^2 - 7t + 10$$

Este exemplo é completamente possível, mas não se trata mais de aceleração constante.

Quando resolvemos $t^3 - 4t^2 - 7t + 10 = 0$, o que obtemos são os instantes de tempo em que a velocidade se anula, ou seja, o carro parou quando o cronômetro marcou estes tempos: $t = -1$, $t = 2$ e $t = 5$.

Não há problema termos obtido $t = -1$ nessa aplicação do polinômio, pois dependendo do contexto, pode significar que o carro estava parado antes de iniciar o processo de contagem com o cronômetro (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

O instante negativo, no entanto, pode apresentar outras interpretações, como o problema de irreversibilidade temporal. As leis físicas fundamentais não distinguem passado de futuro: se trocarmos t por $-t$, nada muda com a forma das leis de Newton ou com a conservação da energia (PRIGOGINE, 1980).



Entretanto, observamos que há uma direção preferencial para o acontecimento dos processos naturais, embora o sentido contrário não viole nenhuma lei física (NUSSZENZVEIG, 2013).

Considere agora outro problema, adaptado de Mathews (1992) e Dornelles Filho (2016).

O problema consiste no seguinte: considere uma esfera de madeira de raio $r = 10,0\text{ cm}$ e densidade relativa 0,638. Ela é colocada para flutuar em água, de densidade relativa 1,00, conforme ilustra a Figura 5. Qual é a profundidade, d , mostrada na figura e medida a partir da superfície da água até o ponto mais profundo da esfera?

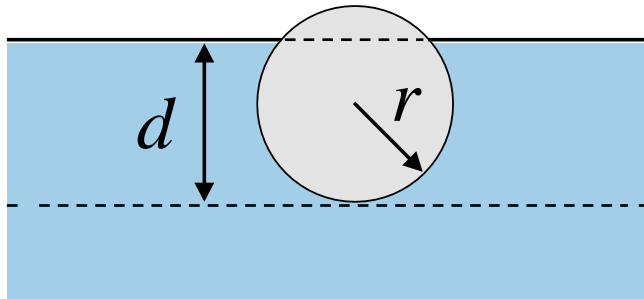


Figura 5 – Situação descrita pelo problema: uma esfera de madeira é colocada em água e passa a flutuar nela. Deseja-se saber a profundidade submersa da esfera

Fonte: adaptada de Mathews (1992) e Dornelles Filho (2016).

Descrição da Imagem: a figura traz um desenho de uma circunferência representando uma esfera pintada de cinza. Uma reta preta representa a superfície da água e cruza com a circunferência quase que em sua corda, representado pelo tracejado preto, que é continuação da reta. A água é representada por um mosaico azulado e abaixo da circunferência, há um tracejado preto para marcar a base da esfera que está mergulhada na água. Um segmento de reta de duas pontas mostra a profundidade em que o volume submerso da esfera se encontra, enquanto um segmento de reta com uma única seta representa o raio da esfera.

De acordo com Arquimedes, um corpo imerso em um fluido recebe uma força vertical, proveniente da diferença de pressão entre a parte superior e a parte inferior mergulhada. Esta força é denominada **empuxo** e é igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.

Vamos aplicar o princípio de Arquimedes. Se o corpo está flutuando, então o peso da esfera é igual ao peso do volume de líquido deslocado pela porção submersa da esfera. Matematicamente, sendo g a aceleração da gravidade, m_e a massa da esfera e m_f a massa de fluido deslocado pela porção submersa, então:

$$m_e \cdot g = m_f \cdot g$$

Do lado esquerdo desta equação está o peso da esfera e do lado direito da equação está o peso do volume de fluido deslocado.

O volume da esfera é determinado por:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 ,$$

com r sendo o raio da esfera.

Já o volume submerso da esfera deve ser calculado pelo **método dos discos**, que consiste em subdividir a esfera em discos de raios variáveis e somar a área da base vezes altura para cada disco (ANTON, 2013).

Procedendo dessa maneira, lembrando que, de acordo com Nussenzveig (2013), a densidade é definida como a razão entre a massa e o volume, ouseja,

$$r = \frac{m}{V} ,$$

podemos escrever a massa como

$$m = rV ,$$

o que conduz a:

$$\frac{4}{3} \rho_e \pi r^3 = \rho_f \left(d^2 \pi r - \frac{d^3 \pi}{3} \right)$$

Organizando os termos e entrando com o valor do raio da esfera, $r = 10,0$ cm, e com as densidades relativas, $r_f = 1,00$ e $r_e = 0,638$, teremos:

$$d^3 - 30d^2 + 2552 = 0$$

Note que esta é uma equação de terceiro grau. Ao resolvemos essa equação, encontraremos a profundidade de submersão da esfera.

Apesar de ser uma aplicação das equações do terceiro grau, os métodos aqui apresentados neste tema encontram a sua limitação.

Não é possível empregarmos divisão de polinômios, exceto no caso em que uma das três raízes possa ser encontrada por inspeção.

Além disso, as raízes dessa equação não são racionais e a redução da ordem fica impossibilitada pela existência de um termo independente não nulo (2552).

Esse tipo de problema justifica o uso de **métodos numéricos**, cuja apresentação foge do escopo deste tema. Para um aprofundamento, recomendamos os livros de Matthews (1992) e Dornelles Filho (2016).

A resolução usando um método numérico resulta em: $d \approx 11,9\text{ cm}$, como primeira raiz positiva. As outras duas raízes são $-8,2$, aproximadamente, o que não faz sentido por se tratar de um comprimento, e $26,3$, aproximadamente. Esta última também não faz sentido para o problema proposto, uma vez que é maior do que o diâmetro da esfera.

Você pode verificar, no entanto, as relações de Girard para este problema:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \approx 2552$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \approx 30$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \approx 0$$

Equações do quarto grau

As equações do 4º grau, também chamadas de equações quárticas, são compostas por coeficientes e uma variável cujo maior expoente é igual a quatro.

De um modo geral, definimos uma equação do quarto grau como:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

em que a, b, c, d e e são números reais, mas $a \neq 0$.

Como anteriormente, podemos encontrar as raízes para as equações do quarto grau e, dependendo do contexto, é mais simples o processo do que para as equações do terceiro grau.

Uma equação biquadrada é uma equação do 4º grau que possui a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Ou seja, uma equação biquadrada é uma equação do 4º grau em que não aparecem os termos com expoente ímpar: x^3 e x .

Na resolução de uma equação biquadrada, devemos substituir sua variável transformando-a em uma equação do segundo grau. Para isso, vamos substituir x^2 , na equação de 4º grau, por y . Por meio de um exemplo, vamos analisar os passos seguintes.

Considere a equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Chamando $x^2 = y$, resulta para a equação:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Utilizando a fórmula resolutiva, obtemos:

$$\mathcal{D} = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36$$

$$\mathcal{D} = 25 > 0$$

Logo,

$$y' = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y' = \frac{13+5}{2} \therefore y' = 9$$
$$y'' = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y'' = \frac{13-5}{2} \therefore y'' = 4$$

Agora, voltamos à variável original, x :

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Logo, as quatro soluções da equação quártica $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ são $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$ e $x_4 = 2$.

Outros métodos, como a redução da ordem da equação, podem ser empregados, e aqui é similar ao exemplo apresentado para as equações de terceiro grau. Além disso, o teorema das raízes racionais, como mostrado para as equações do terceiro grau, também funciona.

Na física e nas engenharias, o fenômeno da transferência de calor é de bastante interesse para o projeto de muitas situações que envolvem os três processos: condução, convecção e radiação.

Quando os três processos ocorrem, podemos fazer um balanço da energia que entra e que sai em um sistema analisado desse tipo e vamos encontrar certamente uma equação polinomial do quarto grau na temperatura, T , ou seja:

$$AT^4 + BT^2 + CT + D = 0,$$

com A, B, C e D, coeficientes reais que dependem de muitas situações. O fato é que, resolvendo essa equação, por exemplo, conhecemos como a temperatura depende dos outros fatores, principalmente geométricos (INCROPERA *et. al.*, 2014; ABDULACK, 2022).

NOVOS DESAFIOS

No início, falamos sobre a queda dos objetos e sobre o projeto de forno industrial. Se você ainda está confuso, então agora é a hora de desfazer a confusão. Ou melhor ainda, se você ainda estiver confuso, deve ter pelo menos desconfiado que o assunto dos polinômios está envolvido de algum modo.

Você já viu que a queda livre, lançamento de projéteis e movimentos com aceleração, em geral, dão origem a equações polinomiais quando queremos extrair alguma informação desses fenômenos, e isto discutimos na parte das equações do segundo grau.

Posteriormente, vimos uma aplicação das equações do terceiro grau e como é fundamental saber colocar as equações em sua forma padrão. Isso é equivalente a transformar uma equação dada em um problema de encontrar raízes.

Com as equações do quarto grau, por exemplo, podemos modelar os problemas que envolvem transferência de calor nas três modalidades: condução, convecção e radiação.

Finalmente, uma das aplicações importantes, porém nem tão evidente: a calculadora! A calculadora, assim como o computador, trabalha com o sistema binário: “ligado/desligado”, 0 ou 1.

É fácil conceber como são feitas as quatro operações num sistema como esses. Mas o que dizer das funções transcendentas como o seno, cosseno, tangente e exponencial?

Uma maneira de programar estas funções é por meio do processo de aproximação de uma função por meio de polinômios. A ideia consiste em trocar uma função por outra mais simples de trabalhar. Assim, é mais simples conceber um sistema eletrônico capaz de responder às potências, pois é uma multiplicação que, no final das contas, é uma sequência de adições.

Esse tipo de aproximação também é feita no pêndulo simples, em que, para pequenas amplitudes, podemos trocar o $\sin(x)$ por x (monômio) e a dinâmica do pêndulo pode ser descrita sem muitas dificuldades.

VAMOS PRATICAR

- Uma equação do primeiro grau (ou equação linear) é toda equação da forma $ax + b = 0$, em que $a \neq 0$.

Em uma fábrica, o custo de produção de um brinquedo específico é de 15 reais fixos mais 2 reais por unidade. Determine o número de brinquedos fabricados que gera um custo de 49 reais para a fábrica.

- Polinômio é uma expressão algébrica de dois ou mais termos. O grau de um polinômio é pelo maior expoente da parte literal.

Carlos trabalha em uma loja de informática. Ele recebe um salário fixo mensal de R\$ 1.000,00 mais R\$ 15,00 por hora extra trabalhada no mês. Assinale a alternativa que contém corretamente o grau do polinômio que representa o salário de Carlos.

- a) Primeiro grau.
- b) Segundo grau
- c) Terceiro grau
- d) Quarto grau.
- e) Quinto grau.

- As relações de Girard são responsáveis pela relação existente entre os coeficientes de uma equação e suas raízes.

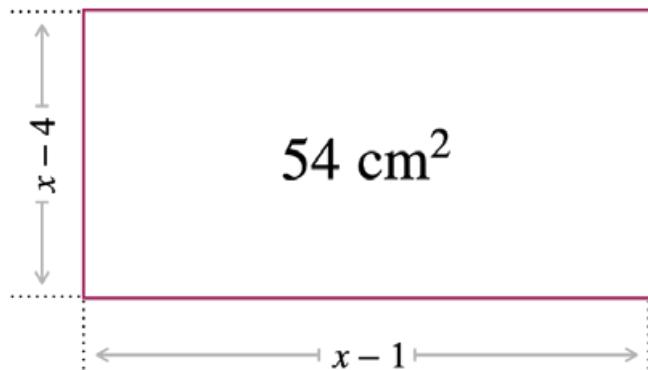
Após uma série de medidas em uma montadora, verificou-se que um carro tem sua velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: $v = t^3 - 6t^2 - t + 30$. Determine

a soma dos instantes em que o carro parou.

- Uma das aplicações dos polinômios é o cálculo de áreas e volumes. Em um retângulo, a área é obtida multiplicando-se o comprimento pela largura.

Em determinado retângulo que tem 54 cm^2 de área, o comprimento é expresso por $(x - 1)$ cm, enquanto a largura é expressa por $(x - 4)$ cm, conforme ilustra a figura. Nessas condições, assinale a alternativa correta sobre o valor de x.

VAMOS PRATICAR



- a) 8 cm
 - b) 10 cm
 - c) 12 cm
 - d) 14 cm
 - e) 16 cm
5. É sempre possível obter as raízes de polinômios. Em alguns casos, elas não pertencem ao conjunto dos reais, ou seja, não existem nos reais, mas no conjunto dos números complexos. As relações de Girard estabelecem uma relação entre as raízes.

Com base nas informações apresentadas, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas:

I - Um polinômio do quarto grau apresenta quatro raízes que podem ser reais ou não

PORQUE

II. as relações de Girard garantem a existência das quatro raízes

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

- a) As asserções I e II são verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
- b) As asserções I e II são verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira e a II é uma proposição falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa e a II é uma proposição verdadeira.
- e) As asserções I e II são falsas.

ABDULACK, S. A. **A Transferência de Calor em Geometria Cilíndrica.** In: XXIV Semana da Física da UEPG. Ponta Grossa, 2022.

ABDULACK, S. A. **Método numérico para a temperatura externa de um escapamento cilíndrico com isolante térmico.** Versão 1.0. Cálculo da temperatura externa em geometria cilíndrica em função da espessura de isolante térmico. Registro INPI, Processo: BR512023001273-4.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo:** um novo horizonte. Volume 1. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

BONATTI, C. et al. **Introdução ao cálculo.** Indaial: UNIASSELVI, 2015.

DORNELLES FILHO, A. A. **Fundamentos de Cálculo Numérico.** Bookman, 2016.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física.** Volume 1, Mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HEWITT, P. **Física Conceitual.** 11 ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

LACHTERMARCHER, G.; WAGNER, E. **Matemática 1.** Rio de Janeiro: FGV, 2011.

MATHEWS, J. H. **Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering.** 2. ed. Prentice Hall, 1992.

NUSSZENZVEIG, H. M. **Curso de física básica.** Volume 1, Mecânica. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

_____. **Curso de física básica.** Volume 2, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

INCROPERA, F. P. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 996p.

PRIGOGINE, I. **From Being to Becoming: Time and Complexity in the Physical Sciences.** USA: W. H. Freeman, 1980.

-
-
1. Seja x o número de brinquedos fabricados. O custo é dado pela expressão: $c = 2x + 15$. Deseja-se saber o valor de x quando o custo total for de 49 reais, ou seja, $2x + 15 = 49$. Resolvendo esta equação do primeiro grau: $x = \frac{34}{2} = 17$ brinquedos. De fato, se $x = 17$ brinquedos, o custo será: $2 \cdot 17 + 15 = 34 + 15 = 49$ reais.
 2. Opção A.

O salário fixo mensal é de 1000 e será sempre acrescentado mês a mês. Como 15 reais por hora são adicionados com as horas extras, então $15x$ é o fator que deve ser acrescentado. Logo, o salário total é de $1000 + 15x$, que é um polinômio do primeiro grau.

3. Se o carro para, então $v = 0$, o que conduz a $t^3 - 6t^2 - t + 30 = 0$. Não é necessário resolver para se obter a soma das três raízes, basta lembrar que $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ é uma equação do terceiro grau. A primeira das relações de Girard fornece: $t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{b}{a}$.
Como $a = 1$ e $b = -6$, o que resulta em $t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{-6}{1} = 6$.

4. Opção B.

$(x - 1)(x - 4) = 54$ cm $(x - 1)(x - 4) = 54 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 50 = 0$, que apresenta duas soluções: $x_1 = 10$ cm e $x_2 = -5$ cm, a qual não faz sentido por se tratar de uma medida de comprimento.

5. Opção B.

De fato, um polinômio do quarto grau apresenta quatro raízes que podem ser reais ou complexas e, embora as relações de Girard sejam válidas, não são elas que garantem a existência das raízes.



TEMA DE APRENDIZAGEM 3

EQUAÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

MINHAS METAS

- Estudar as equações exponenciais e logarítmicas.
- Entender que os métodos de resolução são distintos das equações polinomiais.
- Identificar as propriedades das relações exponenciais e logarítmicas.
- Efetuar conexões com outras áreas do conhecimento que envolvam equações exponenciais e logarítmicas.
- Concentrar a atenção na resolução de problemas que envolvam exponenciais e logarítmicas.
- Verificar algumas aplicações das exponenciais na física, biologia e outras áreas do conhecimento.

INICIE SUA JORNADA

Professor, você sabia que quando os cientistas fazem uma estimativa de uma peça arqueológica, eles usam os conhecimentos que você estudará neste tema, como as equações exponenciais?

Uma equação é uma igualdade entre dois membros. Os dois membros são separados por um sinal de igual. A equação é uma sentença e resolver uma equação significa encontrar valores que tornem a sentença verdadeira.

As equações sempre envolvem incógnitas, ou seja, valores desconhecidos. Em grande parte das aplicações, chamamos as incógnitas de x , embora nada mudasse se chamássemos de y , w ou z .

Uma equação do tipo

$$2^x = 8 \text{ ou } 3^x = 81$$

é chamada de equação exponencial, pois a incógnita aparece no expoente de um número.

Do mesmo modo, uma equação do tipo $\log_2 32 = x$ é uma equação logarítmica e os dois tipos de equações estão intimamente ligados.

Qual é a relação desse tipo de equação com a determinação de medidas de tempos longos, como a idade de um artefato arqueológico?

VAMOS RECORDAR?

É fundamental para esse tema que você se lembre quais são as propriedades da potenciação, pois mesmo que as incógnitas agora apareçam no expoente, as propriedades continuam sendo válidas. Vamos expor aqui as principais para este tema.

Para isso, vamos considerar que a é um número real, mas que seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Também os números m e n são inteiros. Então valem as propriedades:

- **Produto de potências**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- **Divisão de potências**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- **Potência com expoente negativo**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- **Potência de uma potência**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

DESENVOLVA SEU POTENCIAL

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Observe as equações:

$$2^x = 8 \text{ e } 3^x = 8$$

Essas equações possuem variáveis que aparecem no expoente e por isso são chamadas de **equações exponenciais**.

Observe, estudante, que o termo 2^x , cuja variável aparece no expoente, é diferente de x^2 , cuja variável é a base.

Quando escrevemos x^2 , queremos dizer $x \cdot x$. Quando escrevemos 2^x , queremos dizer que o número 2 multiplica ele mesmo por uma quantidade de vezes que desconhecemos, até que tenhamos resolvido a equação.

As equações exponenciais podem ser classificadas em dois tipos, que apresentaremos na sequência.

1ª TÉCNICA: TRANSFORMAR A EQUAÇÃO EM UMA IGUALDADE DE POTÊNCIAS COM BASES IGUAIS.

Transforma-se a equação em uma igualdade na qual, em ambos os membros, têm-se potências de mesma base.

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Logo, a solução da equação $2^x = 8$ é $x = 3$, pois $2^3 = 8$.

Outro exemplo:

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

Logo, a solução da equação $3^x = 81$ é $x = 4$, pois $3^4 = 81$.

2ª TÉCNICA: SUBSTITUIÇÃO DAS POTÊNCIAS COM VARIÁVEL POR UMA VARIÁVEL AUXILIAR.

Substituem-se as potências, cujo expoente tem a variável, por uma variável auxiliar. Posteriormente, determinam-se as raízes desta equação. Em seguida, igualam-se as raízes obtidas à potência cujo expoente tem a incógnita. Por fim, resolve-se a equação do primeiro tipo.

Observe a equação exponencial: $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$.

De acordo com as propriedades da potenciação, podemos reescrever esta equação como:

$$5^x \cdot 5^1 + 5^x + 5^x \cdot 5^{-1} = 775$$

Podemos agora usar o artifício da substituição, trocando 5^x por k :

$$5k + k + \frac{k}{5} = 775$$

Efetuando a soma do lado esquerdo, pois k é fator comum a todas as parcelas, temos:

$$\frac{30k}{5} + \frac{k}{5} = 775$$

Note que agora temos uma equação do primeiro grau na variável k . Resolvendo para k , resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{31k}{5} &= 775 \\ k &= \frac{775 \times 5}{31} \\ k &= \frac{3875}{31} \\ k &= 125\end{aligned}$$

O que significa este valor? Como definimos $k = 5^x$, então $5^x = 125$. Reduzindo à mesma base 5, temos:

$$5^x = 5^3$$

O que imediatamente fornece: $x = 3$ é a solução da equação

$$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$$

Assim, $x = 3$ é a solução da equação exponencial $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$, pois, substituindo $x = 3$ na equação exponencial dada, resulta em 775:

$$\begin{aligned}5^4 + 5^3 + 5^2 &= 625 + 125 + 25 \\ &= 775\end{aligned}$$

Às vezes, pode acontecer de precisarmos combinar técnicas para resolver a equação e descobrir quais são os valores da incógnita que tornam a sentença verdadeira. Observe o exemplo.

$$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

Pelas propriedades da potenciação, podemos escrever:

$$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

Vamos chamar aqui $k = 3^x$. Isto fornece:

$$k^2 - 12k + 27 = 0$$

Note que agora temos uma equação do segundo grau. Empregando a fórmula resolutiva , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 \\ &= 144 - 108 \\ &= 36\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D} > 0$, então existem raízes reais. Logo:

$$\begin{aligned}k' &= \frac{-b + \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \Rightarrow k' = \frac{12 + \sqrt{36}}{2} \therefore k' = 9 \\ k'' &= \frac{-b - \sqrt{\mathcal{D}}}{2a} \Rightarrow k'' = \frac{12 - \sqrt{36}}{2} \therefore k'' = 3\end{aligned}$$

Como definimos antes que $k = 3^x$, então existem duas possibilidades para k:

- $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$
- $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

Portanto, as duas soluções da equação $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ são $x = 1$ e $x = 2$. Estes dois valores tornam a sentença verdadeira.

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Antes de seguirmos adiante com as equações logarítmicas, precisamos entender o que são os logaritmos. O termo logaritmo é proveniente do grego *logos* (razão) e *arithmós* (números). A etimologia da palavra ajuda a entender o que são os logaritmos.



EU INDICO

Nesta sequência de vídeos, é feita uma explicação desde a introdução dos logaritmos até as suas propriedades operatórias.

Exponenciais e logaritmos estão diretamente relacionados. Para entender como esses conceitos estão relacionados, note que o logaritmo é a “operação inversa” da exponencial, como ilustra a Figura 1.

$$\log_2 32 = x \leftrightarrow 2^x = 32$$

Figura 1 – A relação entre logaritmo e exponencial. / Fonte: adaptada de Bonatti et al. (2015).

Descrição da Imagem: a imagem apresenta a relação entre logaritmo e exponencial. Da esquerda para a direita, com todos os elementos em cor preta, o termo $\log_2 32 = x$, ou, o logaritmo na base dois de trinta e dois é igual a x . Uma seta menor preenchida em cor preta logo na sequência, indica a relação de equivalência apontando para o termo $2^x = 32$, de modo que a recíproca seja verdadeira. Abaixo, uma seta curva com borda preta e área branca indica como se estabelece a relação de equivalência, apresentando a base dois do logaritmo como base da exponencial, com a variável na potência e igualando ao logaritmando. Acima, uma seta curva de borda preta e área branca completa a explicação sobre a relação de equivalência.

Definimos o logaritmo x de um número y como sendo o expoente a que se deve elevar um número a para que a igualdade $a^x = y$ seja verdadeira.

APROFUNDANDO

Dizer que $a^x = y$ é o mesmo que dizer $\log_a y = x$, desde que $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Dizemos que a é a base do logaritmo, y é o logaritmando e x é o logaritmo.

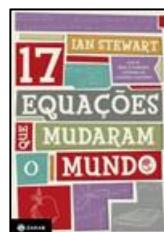


INDICAÇÃO DE LIVRO

“17 equações que mudaram o mundo”, do matemático Ian Stewart.

Autor: Ian Stewart

Neste livro, o matemático Ian Stewart elege dezessete equações que transformaram a nossa percepção e interação com o mundo. Uma dessas grandes transformações foi justamente a ideia dos logaritmos.



Vamos ver, agora, as propriedades dos logaritmos:

PROPRIEDADE 1. LOGARITMO DO PRODUTO

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Exemplo: $\log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

Do lado esquerdo desta equação, $\log_{10} 2 = 0,778$. Do lado direito da equação, há dois termos: $\log_{10} 2 = 0,301$ e $\log_{10} 3 = 0,477$, que somados fornecem $0,301 + 0,477 = 0,778$, ilustrando esta propriedade usando três dígitos significativos exatos.

PROPRIEDADE 2. LOGARITMO DO QUOCIENTE

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Exemplo: $\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

Do lado esquerdo desta equação, $\log_{10} \frac{3}{2} = 0,176$. Do lado direito da equação temos $\log_{10} 3 = 0,477$ e $\log_{10} 2 = 0,301$, de modo que subtraídos, fornecem: $0,477 - 0,301 = 0,176$, com três dígitos significativos exatos.

PROPRIEDADE 3. LOGARITMO DA POTÊNCIA

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

A partir da propriedade 1, esta é facilmente verificável. Como a potência é um produto de termos, então

$$\begin{aligned} \log_a x^y &= \log_a \underbrace{|x \cdot x \cdot \dots \cdot x|}_{y \text{ vezes}} \\ &= \log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x \\ &\quad \underbrace{y \text{ vezes}} \\ &= y \cdot \log_a x \end{aligned}$$

Exemplo: $\log_{10} 2^3 = \log_{10} 8$
 $= 0,903$

Dos exemplos anteriores, como $\log_{10} 2 = 0,301$, então $3 \times 0,301 = 0,903$.

Veja como as propriedades estão diretamente relacionadas com as propriedades da exponencial.

Para calcular um logaritmo, precisamos pensar na sua definição. Vamos voltar ao exemplo $5^x = 125$. Considerando esta expressão, então é verdade também que

$$\log_5 125 = x$$

Observe que, a partir de $5^x = 125$, concluímos que $x = 3$. Isto é o mesmo que dizer que

$$\log_5 125 = 3$$

Em outras palavras, isto é dizer que precisamos elevar o 5 à potência 3, para que o resultado seja 125:

$$\begin{aligned}5^3 &= 5 \times 5 \times 5 \\&= 125\end{aligned}$$

Agora, vamos ver algumas aplicações dos logaritmos e exponenciais.

As escalas decibel e Richter

Quando as quantidades de interesse variam em uma escala muito grande, os logaritmos se mostram essenciais para facilitar os cálculos. A intensidade ou nível de um som, por exemplo, é medida a partir da potência por área de emissão das ondas mecânicas que o constituem.

Essa intensidade é representada pela letra I e é medida em watts por metro quadrado, no Sistema Internacional (HALLIDAY, 2016; NUSSENZVEIG, 2013).

Esta intensidade está relacionada com a energia transmitida pela onda sonora: quanto maior a intensidade, maior a energia e o som é percebido como “mais alto”.

As intensidades sonoras, no entanto, variam em uma escala muito grande.

Por exemplo, o limiar da audição humana é de aproximadamente 10^{-12} W/m^2 , enquanto a intensidade da turbina de um avião a 50 m de distância é de 10^{13} vezes o limiar da audição humana.

Seja, por exemplo, $y = \log_{10} x$. A partir das propriedades 1 e 3 dos logaritmos, estudada neste tema, é possível verificar que aumentando um valor x por um fator 10, então isto é equivalente a somar uma unidade a y :

$$\begin{aligned}\log_{10}(10 \cdot x) &= \log_{10} 10 + \log_{10} x \\&= 1 + y\end{aligned}$$

Dessa constatação, definiu-se a **escala decibel (dB)**, para medir a intensidade em termos do nível sonoro, a qual representaremos por b :

$$b = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

em que $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ corresponde ao limiar da audição humana.

No exemplo do avião a jato, que comentamos anteriormente, teremos:

$$\begin{aligned} b &= 10 \log \left(\frac{10^{13}}{10^{-12}} \right) \\ &= 250 \text{ dB} \end{aligned}$$

Assim, ao invés de representarmos a intensidade do som com potências de dez que apresentam grande diferença na ordem de grandeza, representamos em uma escala linear o nível sonoro.

Isto ocorre também na classificação de terremotos. Ela tem como base as amplitudes das ondas sísmicas registradas por sismógrafos. A escala Richter é, então, definida como o logaritmo da amplitude máxima das ondas sísmicas, em relação a uma distância padrão (RICHTER, 1935; ANTON, 2013).

Se E é a energia liberada em um terremoto, em joules (J), então a sua magnitude, M , é determinada por:

$$M = \frac{\log(E) - 4,4}{1,5}$$

O maior terremoto registrado no Brasil ocorreu em 1955 em uma região do Mato Grosso, com energia liberada de cerca de $1,99 \times 10^{14}$ J. Isto dá uma magnitude

$$\begin{aligned} M &= \frac{\log(1,99 \times 10^{14}) - 4,4}{1,5} \\ &= \frac{\log(1,99) + 14 - 4,4}{1,5} \\ &= \frac{0,29885 + 14 - 4,4}{1,5} \\ &\approx 6,6 \end{aligned}$$

Ou seja, 6,6 pontos na escala Richter.

Interpretação microscópica da segunda lei da termodinâmica

Uma função de estado na termodinâmica é uma **quantidade que caracteriza o estado do sistema**. Na mecânica, a noção de **estado** é facilmente compreendida: a posição e velocidade de um móvel caracterizam o estado do sistema mecânico. Todas as informações estão contidas em um diagrama de velocidade em função da posição.

Para um sistema termodinâmico, existem várias grandezas que podem ser chamadas de variáveis de estado e caracterizam de modo único um sistema, são elas: a energia interna, a entalpia, a temperatura, pressão, volume e a **entropia**.

As grandezas que caracterizam o estado de um sistema são macroscópicas, mas apresentam explicações microscópicas. Por exemplo, a **temperatura** macroscopicamente é a grandeza que permite decidir sobre o equilíbrio térmico entre sistemas. Microscopicamente, no entanto, ela está associada ao movimento das moléculas que compõem o sistema: a rigor, é a energia cinética média dessas moléculas (REIF, 1985; NUSSENZVEIG, 2013).

Do mesmo modo, a **entropia** é uma grandeza macroscópica, mas apresenta uma interpretação microscópica que se apóia na estatística.



Ela é a base para a segunda lei da termodinâmica, que diz que se um processo irreversível ocorrer em um sistema fechado, a entropia sempre aumenta (HALLIDAY, 2016).

Para compreender isso, vamos utilizar um exemplo usando as cartas de um baralho, como proposto por Stewart (2013). Considere que tenhamos seis cartas de um baralho: 2, 3, 4, J, Q, K. Podemos separar o baralho em dois montes: um apenas contendo as cartas 2, 3 e 4, enquanto o outro com as cartas J, Q e K.

Podemos embaralhar separadamente os montes, mas ainda saberemos que as cartas numéricas estão em um monte, enquanto as outras cartas estão no segundo monte. Esse é um arranjo ordenado das cartas. Existem seis possibilidades para cada monte, de modo que teremos um total de 36 configurações para cada um dos montes separados.

Agora, se unirmos os dois montes e embaralharmos o único monte de seis cartas, então teremos configurações do tipo: 2QK3J4, 3K4JQ2, e assim por diante. Existem, neste caso, 720 maneiras de arranjar as cartas em um único monte: para a primeira carta, 6 possibilidades, para a segunda carta, 5 possibilidades, e assim sucessivamente, de maneira que o total será:

$$\begin{aligned} 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 &= 720 \\ &= 6! \end{aligned}$$

em que $6!$ é o fatorial de seis, definido por $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Essa divisão ou não das cartas em dois montes é chamado de **macroestado** do sistema, enquanto uma configuração específica, digamos 2QK3J4 é o **microestado** do sistema.

Percebemos então que um estado mais ordenado tem 36 microestados, enquanto que o estado mais desordenado tem 720 microestados. Assim, estados com mais desordem são mais prováveis de ocorrerem naturalmente.

A probabilidade de que tenhamos exatamente a sequência 2, 3 e 4 no primeiro monte e K, Q e J no segundo monte é o produto das probabilidades individuais: 6 possibilidades para o primeiro monte e 6 para o segundo monte, completando as 36 configurações.

A **entropia**, por sua vez, é uma grandeza aditiva de maneira que a entropia total do sistema composto por dois montes é a soma das entropias individuais.

Toda essa discussão sugere encararmos a entropia como uma medida da desordem de um sistema: maior multiplicidade de configurações do sistema implica maior entropia. Logo, um único monte apresenta entropia maior do que a situação com dois montes mais ordenados. Por exemplo, podemos associar $\ln 36 = 3,58$ como a entropia do sistema com dois montes e $\ln 720 = 6,58$ como a entropia do sistema com um único monte de cartas.

Pelas propriedades 1 e 3 estudadas neste tema, chegamos à conclusão de que a conexão entre a quantidade de configurações de um sistema e a entropia é dada pelo

logaritmo, pois ela é capaz de transformar produtos em somas, uma vez que a probabilidade total é o produto das probabilidades e a entropia é a soma das entropias.

Se S for a entropia do sistema, então chegaremos à equação de Boltzmann (REIF, 1985; HALLIDAY, 2016; NUSSENZVEIG, 2013; STEWART, 2013):

$$S = k \ln W$$

Nesta equação, W é a quantidade de microestados associado a um macroestado e $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K.

Aqui empregamos a base $e \approx 2,7182$ para o logaritmo e o representamos por \ln , isto é, \log_e .

Esse tipo de exemplo geralmente é empregado para demonstrar que não seríamos abandonados pelo ar que respiramos: se a situação com um monte e seis cartas é muito mais provável, imagine com o ar atmosférico nas condições normais de temperatura e pressão! Não são apenas seis moléculas, como no exemplo do baralho, mas cerca de 10^{23} moléculas.

Estados em que o ar está todo concentrado em apenas uma parte da sala são altamente improváveis e estão associados a uma entropia extremamente baixa, enquanto o ar distribuído pela sala apresenta uma multiplicidade inimaginavelmente maior.

O método da aplicação dos logaritmos para as equações exponenciais

Toda equação em que a variável aparece no logaritmando, na base ou em ambos, é chamada de equação logarítmica.

Quando uma equação exponencial não puder ser resolvida apenas cancelando as bases e igualando os expoentes, pode-se utilizar o método de aplicar logaritmos em ambos os membros da igualdade.

Considere a equação $\log_2 x = 6$.

A variável, x , está no logaritmando. O logaritmo vale 6 e a base vale 2.

Assim, é verdade também que $x = 2^6 = 64$. Portanto, $\log_2 64 = 6$.

Agora, vamos resolver um exemplo de equação exponencial que não é possível de resolver pelas duas técnicas apresentadas no início.

$$5^{x+1} = 3^x$$

Observe que não conseguimos reduzir esta equação a uma equação com bases iguais. De maneira similar, também não conseguimos definir algo como $k = 5^x$ para substituir no problema, pois ainda continuariam com o termo 3^x .

Para resolver essa equação, precisamos lembrar da propriedade 3 dos logaritmos: basta tomarmos o logaritmo em ambos os membros da equação $5^{x+1} = 3^x$.

Podemos aplicar o logaritmo em qualquer base. Aqui, vamos usar a base 10:

$$\log_{10} 5^{x+1} = \log_{10} 3^x$$

Pela propriedade 3 dos logaritmos, $(x+1)\log_{10} 5 = x\log_{10} 3$

Efetuando a multiplicação pela propriedade distributiva, temos:

$$x\log_{10} 5 + \log_{10} 5 = x\log_{10} 3$$

Trazendo as incógnitas para o lado esquerdo, temos:

$$x(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = -\log_{10} 5$$

$$x = -\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$$

Esta é a resposta exata. Para obtermos uma aproximação numérica, podemos usar uma calculadora:

$$x = -\frac{0,7}{0,7 - 0,5}$$

$$= -3,5$$

Logo, a solução da equação $5^{x+1} = 3^x$ é $x = -3,5$.

Finalmente vamos a um exemplo que combina as técnicas já estudadas.

Vamos resolver a equação

$$(\log_4 x)^2 - 3\log_4 x = 4$$

Para resolver isto, vamos chamar $y = \log_4 x$. Neste caso, teremos uma nova equação:

$$y^2 - 3y = 4$$

Colocando na forma padrão de uma equação do segundo grau, temos:

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

Resolvendo pela fórmula resolutiva:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \\ &= 25 \\ y' &= \frac{-(-3) + \sqrt{\mathcal{D}}}{2} \Rightarrow y' = \frac{3+5}{2} \therefore y' = 4 \\ y'' &= \frac{-(-3) - \sqrt{\mathcal{D}}}{2} \Rightarrow y'' = \frac{3-5}{2} \therefore y'' = -1\end{aligned}$$

Como chamamos $y = \log_4 x$, teremos:

$$\log_4 x = -1 \text{ e, assim, } x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Para a segunda solução, teremos

$$\log_4 x = 4$$

Portanto, $x = 4^4 = 256$ e são as duas soluções da equação $(\log_4 x)^2 - 3\log_4 x = 4$.

Anteriormente, comentamos que poderíamos ter empregado qualquer base para os logaritmos. Isso porque é sempre possível efetuar uma mudança de base.

Pode ser útil a mudança de base se conhecermos alguns valores de logaritmos e não dispusermos de calculadoras, ou se precisarmos do valor do logaritmo em uma base que não teríamos como calcular.

APROFUNDANDO

Sempre que for necessário, podemos efetuar uma mudança de base dos logaritmos. Se tivermos um logaritmo de um número b na base a e quisermos mudar a base para c , então precisamos fazer o seguinte:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

Por exemplo, uma base fundamental na teoria da informação é a base 2. Vamos supor que precisássemos saber o valor de $\log_2 10$. Podemos expressar o logaritmo de 10 na base 2 como a razão de logaritmos com base 10:

$$\begin{aligned}\log_2 10 &= \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{0,301} \\ &\approx 3,32\end{aligned}$$

Uma das bases mais empregadas é a base de Euler, que veremos a seguir.

O número de Euler e a base de Napier

Vários nomes importantes estão associados com os desenvolvimentos das equações exponenciais e dos logaritmos. Dois deles são o matemático e físico suíço Leonhard P. Euler (1707 - 1783) e o matemático, físico e astrônomo escocês John Napier (1550 - 1617). Dentre as enormes contribuições do primeiro, figuram as equações exponenciais com base conhecida como o número de Euler.



O matemático e físico Leonhard Euler. Um dos mais prolíficos matemáticos da história. Foi aluno de Johann Bernoulli e credita-se a ele a organização das aplicações do Cálculo na Física. Com a sua estrondosa memória, memorizou a Eneida de Virgílio e o período em que mais produziu foram os últimos 17 anos de sua vida, acometido de cegueira. Estima-se que a sua contribuição forme mais de 100 volumes (in-quarto), embora muita coisa tenha sido perdida (ANTON, 2014).



O matemático e físico John Napier. Atribui-se a John Napier a invenção dos logaritmos. Ele dedicou grande parte do seu tempo para encontrar meios de facilitar cálculos matemáticos complicados (STEWART, 2013).

Como mostra Guidorizzi (2015), o número de Euler, representado por e com valor aproximado de 2,7182, é proveniente de um chamado limite fundamental. Ele pode ser obtido fazendo o seguinte: imagine que você faz um depósito de 1 real em uma aplicação que rende uma certa taxa percentual de juros mensal, j . No primeiro mês, você terá $(1+j)$. No segundo mês, terá $(1+j)(1+j) = (1+j)^2$ e assim por diante. Para um tempo t qualquer, teremos uma equação exponencial do tipo $(1+j)^t$, que é justamente a relação de juros compostos.

O juro composto é uma relação de crescimento exponencial.

Uma das maneiras de visualizar o que Euler obteve é **imaginar uma taxa de juros inversamente proporcional ao tempo, o que dá:** $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$. Após um

tempo muito longo, o resultado será uma constante matemática, e não uma quantidade ilimitada: esse número vale aproximadamente 2,7182 e para ele é usado o número e .

Assim, uma equação de base e é amplamente utilizada para várias situações reais envolvendo exponenciais: e^x .

Do mesmo modo, Napier estudou logaritmos com base e e hoje este tipo de logaritmo é chamado de logaritmo natural.

Vamos ver agora dois exemplos de aplicação das equações exponenciais e como usar os logaritmos nessas circunstâncias.

Datação por radiocarbono

O método do carbono-14 desenvolvido por Libby (1961) é amplamente utilizado para saber a idade de materiais orgânicos.

Quando o N_2 na parte superior da atmosfera terrestre é bombardeado por raios cósmicos, o elemento produzido é o carbono-14 (C^{14}), que é um elemento radioativo.

Esse isótopo de carbono se combina com o oxigênio (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2), que é ingerido pelas plantas e que, por um processo encadeado, chega aos animais. Assim, todos os seres vivos absorvem quantidades de carbono-14.

Existe, portanto, um equilíbrio dinâmico entre o carbono e o nitrogênio, resultante da desintegração do carbono-14 e este equilíbrio é mantido enquanto os seres estão vivos.

Quando um ser vivo morre, esse equilíbrio não é mais mantido e o carbono-14 no tecido começa a decair. Com isso, a idade de qualquer coisa que conte haja material animal ou vegetal pode ser estimada pela medição da porcentagem do carbono original na amostra (ANTON, 2014; NUSSENZVEIG, 2013)

O que se faz aqui é usar um conceito químico chamado de meia-vida, que é o tempo que leva para que um radioisótopo decaia metade da quantidade original.

Por exemplo, devido à desintegração, uma massa inicial m_0 de C^{14} é reduzida a uma massa m em t anos. As duas estão relacionadas pela expressão:

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5400}}$$

em que 5400 é a meia-vida do C^{14} , ou seja, o tempo, em ano, que leva para que uma quantidade de C^{14} decaia pela metade da quantidade original.

Podemos perguntar agora em quanto tempo 5,00 g de C^{14} serão reduzidos a 0,625 g. Para resolver isso, considere que a massa inicial seja $m_0 = 5,00$ g e que $m = 0,625$ g. Substituindo na equação, teremos:

$$0,625 \text{ g} = (5 \text{ g}) \cdot 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$0,125 = 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$\frac{125}{1000} = 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$2^{-3} = 2^{-\frac{t}{5400}}$$

$$-\frac{t}{5400} = -3$$

$$t = 16200 \text{ anos}$$

Portanto, em 16200 anos, uma quantidade de 5,00 g de C^{14} serão reduzidas para 0,625g.

A análise por radiocarbono foi utilizada para estimar a idade do que ficou conhecido como “Ötzi, o Homeom do Gelo”, uma múmia humana preservada, descoberta na fronteira entre a Áustria e a Itália, em 1991 (DICKSON, 2015; KUTCHERA *et al.*, 2014). Mais de 200 análises foram efetuadas pelo método do radiocarbono em amostras da região de fronteira, o que permitiu sugerir a atividade humana naquela região no período Holoceno.

Crescimento populacional de bactérias

Imagine que, em uma cultura, o número de bactérias, N , varie de acordo com a expressão $N = 5000e^{kt}$, em que é o tempo t e $k = 0,047 / \text{min}$ é a taxa de crescimento populacional das bactérias. Quanto tempo leva para a cultura atingir 6500 bactérias?

Substituindo $N = 6500$ bactérias na equação dada, temos:

$$6500 = 5000e^{0,047t}$$

$$\frac{6500}{5000} = e^{kt}$$

Pela aplicação do logaritmo natural em ambos os lados da equação, temos:

$$0,26 = 0,047t$$

$$t = \frac{0,26}{0,047}$$

$$t = 5,53 \text{ min}$$

Portanto, leva cerca de 5 minutos e 32 segundos para que a cultura inicial de 5000 bactérias cresça para 6500 bactérias.

NOVOS DESAFIOS

A cada vez que nos aprofundamos mais em aspectos quantitativos da realidade, vamos a matemática presente.

Muitas vezes não é fácil efetuar conexões diretas, pois nem sempre o conhecimento científico visa a aplicabilidade imediata.

Por exemplo, estabelecer relações com conceitos bem abstratos é tarefa árdua. A física, no entanto, é chamada muitas vezes de “a mais fundamental das ciências”, pois atua desde o muito pequeno até a escala do muito grande.

Como você estudou neste tema, as aplicações das equações exponenciais e logarítmicas são imensas e é essencial saber trabalhar com estes tipos de equações e as propriedades que as fundamental, para que possam ser aplicadas. Com as equações exponenciais, é possível estudar o decaimento radioativo, a datação por radiocarbono, o crescimento de bactérias e muitos outros problemas.

A partir das equações logarítmicas, é possível estudar a entropia termodinâmica, a teoria da informação e definir novas escalas, como a escala decibel e Richter. Além disso, exponenciais e logaritmos se complementam.

No histórico de Euler e Napier, não havia o conhecimento de determinar a idade dos materiais arqueológicos por meio daquilo que eles estavam estudando. Este conhecimento veio posteriormente, o que mostra que nem sempre se estuda algo porque é imediatamente útil, mas pelo valor do conhecimento em si mesmo. Mais tarde, estes conceitos se tornam úteis.

VAMOS PRATICAR

1. Em uma equação exponencial, a variável está no expoente de uma potência.

Considere, por exemplo, o movimento de um foguete. A queima de combustível para a subida de um foguete permite que ele seja projetado no sentido contrário à combustão por conservação da quantidade de movimento linear. A partir das considerações do princípio da conservação da quantidade de movimento, a equação que fornece a relação entre a massa de combustível antes da ignição, m_i , e após a ignição, m_f , é dada por:

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{\frac{v_f - v_i}{v_e}}, \text{ sendo } v_i \text{ a velocidade inicial do foguete e } v_f \text{ a velocidade final, após a}$$

queima do primeiro estágio, e v_e é a velocidade de ejeção dos gases, o que é constante para um dado tipo de combustível.

Considere o movimento gerado pelo primeiro estágio da queima de combustível de um foguete que parte do repouso em uma plataforma de lançamento. A equação que fornece a relação entre as massas e velocidades é dada por:

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{\frac{v_f - v_i}{v_e}}, \text{ sendo } v_i \text{ a velocidade inicial do foguete e } v_f \text{ a velocidade final, após a}$$

queima do primeiro estágio, e v_e é a velocidade de ejeção dos gases, o que é constante para um dado tipo de combustível.

Determine a velocidade final do foguete, em metros por segundo, após a queima de 2×10^6 kg de querosene e O_2 líquido, se a massa do foguete vazio for de 140×10^3 kg e se a velocidade de ejeção dos gases for de 2,7 km/s.

VAMOS PRATICAR

2. As equações que possuem variáveis que aparecem no expoente são chamadas de equações exponenciais. Elas podem ser resolvidas por meio dos logaritmos, de modo a transformar a equação exponencial em uma equação linear que pode ser resolvida isolando a variável.

Um satélite que requer 7 W de potência para operar em capacidade máxima está equipado com uma fonte de radioisótopos cuja taxa de emissão é dada pela expressão:

$$P = 75e^{-\frac{t}{125}}, \text{ em que } t \text{ é o tempo em dias que a fonte é usada. Determine o tempo, em}$$

dias, que o satélite pode operar em capacidade máxima.

3. Toda equação em que a variável aparece no logaritmando, na base ou em ambos, é chamada de equação logarítmica. A resolução é feita tendo em mente a definição do logaritmo e a sua relação com a exponencial.

Na escala Richter, a magnitude M de um terremoto está relacionada com a energia liberada E, em joules, pela equação:

$$\log_{10} E = 4,4 + 1,5M .$$

Em 2022, um terremoto de magnitude 6,5 atingiu a região da fronteira entre o Brasil e o Peru, fato que ocorreu às 22 h do horário de Brasília. Assinale a alternativa que fornece corretamente a energia liberada por esse terremoto.

- a) $1,4 \times 10^{16}$ J.
- b) $0,98 \times 10^{-2}$ erg.
- c) $3,2 \times 10^4$ J.
- d) 3,5 J.
- e) 14,15 J.

-
4. O vidro é um material transparente para a luz visível, do mesmo modo que o tecido humano é transparente aos raios-X. Quando um feixe de luz atinge um painel de vidro, os fótons – correspondentes ao comportamento corpuscular da luz – interagem com os átomos e as moléculas do material alvo. Se o alvo for o vidro, a maioria dos fótons incidentes é transmitida por um processo encadeado de absorção e emissão, a partir das oscilações dos elétrons do material. Ao passar pelo vidro, a intensidade da luz sofre uma redução, que pode ser expressa em termos percentuais da luz incidente.

Admita que, quando a luz incide em um painel de vidro, a sua intensidade diminui em 10%. Qual é o número mínimo de painéis necessários para que a intensidade da luz, após atravessar esses painéis, se reduza a 1/3 da sua intensidade?

- a) 7 painéis.
 - b) 8 painéis.
 - c) 9 painéis.
 - d) 10 painéis.
 - e) 3 painéis.
5. A datação por meio do radioisótopo C^{14} é um dos meios mais utilizados para medida de tempos longos envolvendo material orgânico.

Esse processo de desintegração radioativa é também chamado de decaimento radioativo. As proposições seguintes tratam desse método de medida de tempos longos.

- I - O método é possível porque o decaimento radioativo segue uma equação exponencial.
- II - A técnica consiste em medir a quantidade de C^{14} atualmente na amostra e comparar com um valor conhecido com base na meia-vida do C^{14} .
- III - A possibilidade desta técnica reside na observação de que existe uma quantidade fixa de C^{14} em um ser vivo.
- IV - O método prevê incorretamente que todo material orgânico tem aproximadamente a mesma idade.

É correto o que se afirma em:

- a) I e IV, apenas.
- b) II e III, apenas.
- c) III e IV, apenas.
- d) I, II e III, apenas.
- e) II, III e IV, apenas.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo: um novo horizonte.** 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

BONATTI, C.; JENSKE, G.; PELLIZZARO, M. M., **Introdução ao cálculo.** Indaiá: UNIASSELVI, 2015.

DICKSON, J. H. OEGGL, K. HANDLEY, L. L. The Iceman Reconsidered. **Scientific American** (Special Editions), v. 15, p. 4-10, 2015.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física.** Volume 2: Gravitação, Oscilações e Ondas e Termodinâmica. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

KUTCHERA, W. et. al. Evidence for early human presence at high altitudes in the Ötztal Alps (Austria/Italy). **Radiocarbon**, v. 56, n. 3, p. 923-947, 2014.

LIBBY, W. F. Radiocarbon Dating: The method is of increasing use to the archeologist, the geologist, the meteorologist, and the oceanographer. **Science**, v. 133, n. 3453, p. 621-629, 1961.

NUSSZENZVEIG, M. **Curso de física básica.** Volume 2, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

REIF, F. Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. New York: McGraw-Hill, 1985.

RICHTER, C. F. An Instrumental Earthquake Magnitude Scale. **Bulletin of Seismological Society of America**, v. 25, n. 1, p. 1-32.

STEWART, I. **Dezesete equações que mudaram o mundo.** Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

GABARITO

- Como a massa inicial (foguete e combustível) é a soma da massa vazia com a massa de combustível, então $\Sigma m_i = 2140000 \text{ kg}$, enquanto $\Sigma m_f = 140000 \text{ kg}$. A velocidade de ejeção dada é de 2,7 km/s ou $\Sigma v_e = 2700 \text{ m/s}$. Considerando $\Sigma v_i = 0 \text{ m/s}$, a expressão da relação das massas em termos dos valores fornecidos é:

$$\frac{2140000}{140000} = e^{\frac{-v_f}{2700}}$$

Resolvendo a divisão do lado esquerdo e aplicando o logaritmo natural em ambos os lados, resulta em:

$$e^{\frac{-v_f}{2700}} = 15,28$$

$$\ln e^{\frac{-v_f}{2700}} = \ln 15,28$$

$$\frac{v_f}{2700} = 2,72 \text{ m/s}$$

$$v_f = 7362 \text{ m/s}$$

Logo, a velocidade final do foguete, após a queima de todo o combustível do primeiro estágio, é de 7362 m/s, ou aproximadamente 26000 km/h.

FÓRMULA:

Resolução de equações exponenciais pela aplicação do logaritmo.

- Deseja-se saber o tempo de operação em capacidade máxima e isso exige uma potência de 7 W. Iniciamos igualando esta potência com a taxa de emissão da fonte de radioisótopos:

$$7 = 75e^{-\frac{t}{125}}.$$

GABARITO

Reorganizando, teremos: $\frac{7}{75} = e^{-\frac{t}{125}}$. Aplicamos o logaritmo natural de ambos os lados

dessa equação, para obter:

$$\ln \left(\frac{7}{75} \right) = \ln \left(e^{-\frac{t}{125}} \right)$$
$$-2,37 = -\frac{t}{125}$$
$$t \approx 296 \text{ dias}$$

Portanto, o satélite pode operar em capacidade máxima por 296 dias.

FÓRMULA:

Para resolver, é necessário aplicar a propriedade de multiplicação de potências e a igualdade entre potências de bases iguais.

3. Opção A.

A magnitude fornecida é de $\Sigma M=6,5\Sigma$. Substituindo na expressão que relaciona a energia e a magnitude, teremos:

$$\log_{10} E = 4,4 + 1,5 \times 6,5$$

$$\log_{10} E = 14,15$$

De acordo com a definição de logaritmo:

$$E = 10^{14,15} J$$

$$\approx 1,4 \times 10^{16} J$$

Portanto, a energia liberada no terremoto de 2022 foi de $1,4 \times 10^{16} J$.

Para fins comparativos, um objeto de 1,0 kg que recebesse esta energia e a transformasse em energia cinética, de movimento, adquiriria uma velocidade de $1,7 \times 10^8 \text{ m/s}$, cerca de 56% a velocidade da luz no vácuo.

GABARITO

FÓRMULA:

Definição da escala Richter e definição de logaritmo.

4. Opção D.

Como a intensidade da luz diminui em 10% cada vez que passa por um painel, então significa que 90% da luz passa. Por cada painel, passam $0,9 = \frac{9}{10}$, ou $9/10$. Queremos saber quantos painéis são necessários para que essa intensidade seja $1/3$. Equacionando temos: $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{3}$ Aplicando o logaritmo em ambos os membros desta equação, re-

sulta em: $x = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log(0,9)}$, que dá aproximadamente 10 painéis.

Como a intensidade da luz é reduzida em 10% cada vez que atravessa um painel, então 90% dela é transmitida para o outro painel, ou seja, $0,9 = \frac{9}{100}$.

Dessa maneira, após passar pelo primeiro painel, a luz transmitida terá intensidade $0,9$ do feixe original incidente.

Pelo segundo painel, a luz incidente agora é $0,9$ da intensidade original, antes de passar pelo primeiro. Logo, será transmitida uma intensidade $0,9 \times 0,9 = 0,9^2$ a partir do segundo painel.

Queremos saber quantos painéis são necessários para que a luz incidente original seja reduzida para $\frac{1}{3}$ da intensidade original.

Equacionando, teremos: $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{3}$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação resulta em:

$$\log_{10} 0,9^x = \log_{10} \frac{1}{3}$$

$$x \log_{10} 0,9 = -0,47712$$

$$-0,0457x = -0,477$$

GABARITO

$$x = \frac{0,477}{0,0457}$$
$$x \approx 10$$

Portanto, nessas condições, a intensidade da luz será reduzida a 1/3 da sua intensidade inicial se forem dispostos 10 painéis em sequência.

Conforme apresentado no início, como se trata da quantidade mínima de painéis, então nenhuma outra alternativa pode estar correta.

FÓRMULA:

Aplicação do logaritmo em ambos os membros da igualdade e propriedade 3 do livro.

5. Opção D.

A observação de Libby foi que há uma quantidade fixa de C^{14} constituindo um equilíbrio dinâmico enquanto um ser se mantém vivo. Após a morte, este equilíbrio não é mantido, e se inicia o processo de decaimento no tecido. Esse processo segue uma lei exponencial e a técnica consiste em medir a quantidade na amostra desejada e comparar com o existente com base na meia-vida do C^{14} . De nenhum modo a técnica prevê idade igual para todos os organismos.

Descrição da Imagem: a imagem traz uma reta desenhada em cor preta com setas nas extremidades. Um ponto A marca a origem da semirreta AB e da semirreta AC .

O PLANO

Um plano apresenta duas dimensões: o comprimento e a largura caracterizam as medidas dos lados do quadrado que representa o plano. Neste caso, o quadrado em questão é parte de um plano e pode ser medido, pois é finito e o perímetro delimita a sua área, que poderia ser medida em centímetros quadrados, por exemplo.

Olhe agora para a capa de um livro ou uma folha de sulfite sobre a mesa. Ou mesmo para a parede da sua sala. Estes constituem a representação de uma parte do plano.

Como vivemos em um mundo de três dimensões espaciais, todas as formas com mais dimensões fogem à nossa percepção.

O plano é fundamental em muitos aspectos. Por exemplo, é **essencial saber que ao lançar um projétil, o movimento ocorre em um plano**. No eletromagnetismo, o conceito de plano surge quando precisamos calcular campos elétricos e potenciais eletrostáticos para planos carregados, o que depois permite o cálculo de grandezas importantes associadas aos capacitores.

A noção de plano desempenha um papel fundamental na definição de grandezas como o fluxo elétrico.

O plano é indicado por letras gregas minúsculas: α, β, γ .

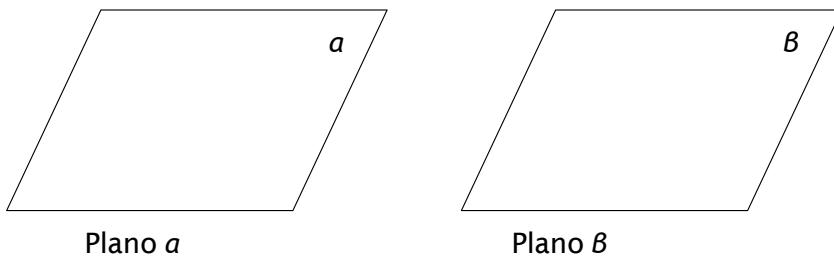


Figura 13 – Representação de um plano a partir de dois paralelogramos finitos.
Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz a representação ilustrativa de dois planos. À esquerda, o plano α é representado por um paralelogramo de bordas pretas e preenchimento branco. À direita, o plano β também é representado por um paralelogramo de contorno preto e área branca.

O semiplano

Se $r \subset \alpha$ (lê-se “r está contido em alfa”), então a reta r divide o plano α em dois **semiplanos**.

Neste caso, a reta r é chamada de **reta origem**.

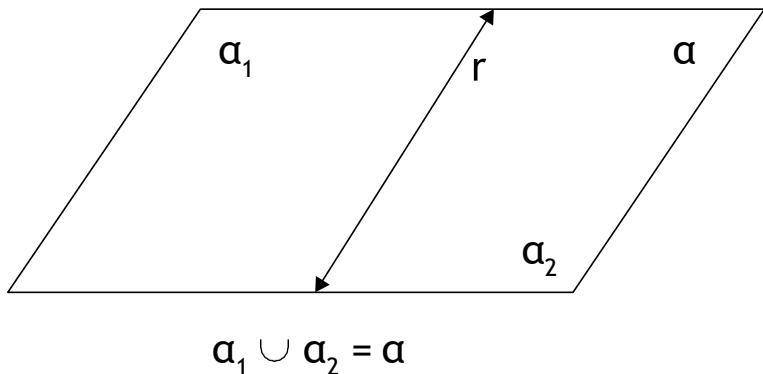


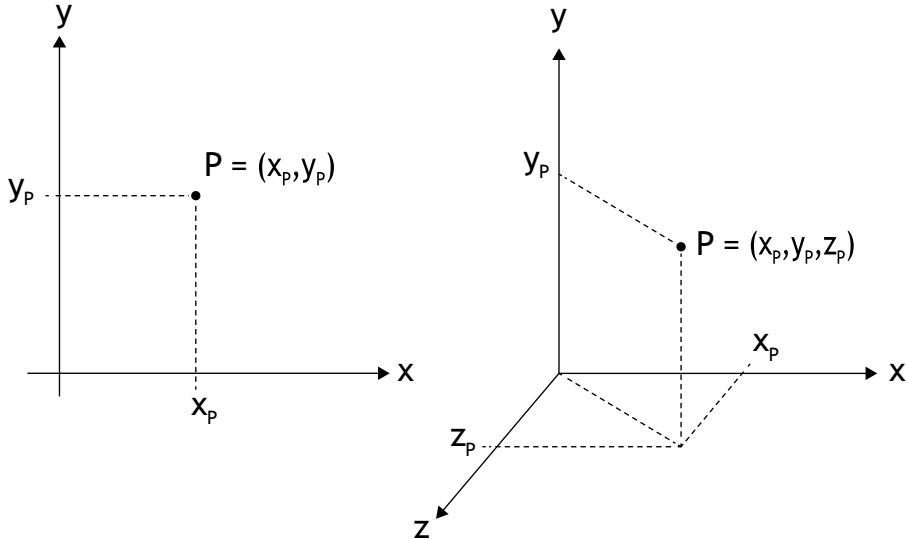
Figura 14 – Dois semiplanos divididos por uma reta r / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz a representação de um plano α por um paralelogramo de bordas pretas e área branca. Uma reta r , representada por uma linha preta com setas nas extremidades divide o plano em dois semiplanos: α_1 e α_2 . A figura mostra ainda a inscrição em cor preta $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$, mostrando que a união dos semiplanos forma o plano α .

Os pontos que pertencem a um mesmo plano são chamados de **pontos coplanares**.

O ESPAÇO

Se você olhar ao redor, terá a noção do que é o espaço. O espaço apresenta três dimensões e é possível atribuirmos um comprimento, largura e altura às dimensões de um cubo usado para representar uma parte do espaço. Assim, um cubo, parte do espaço, pode ser medido em centímetros cúbicos.



$y \ x \ x_P \ y_P \ P = (x_P, y_P)$

$x \ y \ z \ x_P \ y_P \ z_P \ P = (x_P, y_P, z_P)$

Figura 15 – Localização de um ponto no plano e no espaço / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz à esquerda um plano munido de coordenadas cartesianas é representado por duas retas perpendiculares em cor preta e a localização de um ponto, representado por um círculo preto, é feita no plano por comparação com os eixos xy. À direita, um ponto, representado por um círculo preto, é localizado no espaço com o auxílio de coordenadas retangulares, representadas por retas pretas mutuamente ortogonais.



INDICAÇÃO DE LIVRO

É fundamental que o estudante tenha contato com as fontes primárias. Os Elementos, uma coleção de cerca de 13 livros escritos pelo matemático Euclides, constituem o tratado da geometria, contendo as definições, axiomas, proposições e demonstrações dos elementos que tratamos neste tema.



Um axioma é uma proposição considerada autoevidente. Um exemplo de axioma no contexto dos números inteiros é: a soma de dois números positivos resulta em um número positivo.

Um axioma é
uma proposição
considerada
autoevidente

Euclides foi o primeiro grande estudioso da geometria, em que ele sistematizou todo o conhecimento desta área por meio do método dedutivo. Assim, a partir dos axiomas seguem-se logicamente todas as proposições válidas do sistema, os teoremas.

Alguns axiomas relacionados aos elementos primitivos da geometria estão listados na sequência.

1. Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
2. Num plano, há infinitos pontos.
3. Por um ponto passam infinitas retas.
4. É possível traçar uma reta ligando dois pontos.
5. Toda reta que tem dois pontos distintos num plano fica inteiramente contida no plano.
6. Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contêm.
7. Por três pontos não situados na mesma reta (não colineares) passa um e somente um plano.
8. Uma reta de um plano divide-o em dois semiplanos.
9. Um plano divide o espaço em duas regiões chamadas semiespaços.
10. Dada uma reta r e um ponto exterior P , existe exatamente uma reta que passa em P e é chamada de paralela a r .

Uma discussão a respeito dos conceitos estudados neste tema é apresentada na sequência.



EU INDICO

Neste vídeo, o Prof. Ledo Vaccaro discute os conceitos de plano, reta e espaço, resumindo os aspectos trabalhados neste tema.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Ao escutar a palavra reta, você pode tentar visualizá-la em vários objetos ao seu redor. Como por exemplo: na fuga que divide dois pisos, na aresta de uma mesa, no encontro entre duas paredes, entre a parede e o chão ou entre a parede e o teto.

Retas coplanares

Duas ou mais retas são **coplanares** quando estão contidas no mesmo plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ t \subset \alpha \end{array} \right\} r, s, t \text{ são coplanares}$$

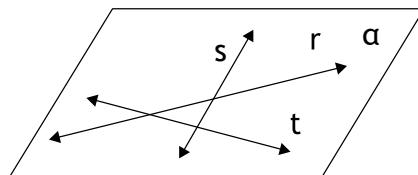
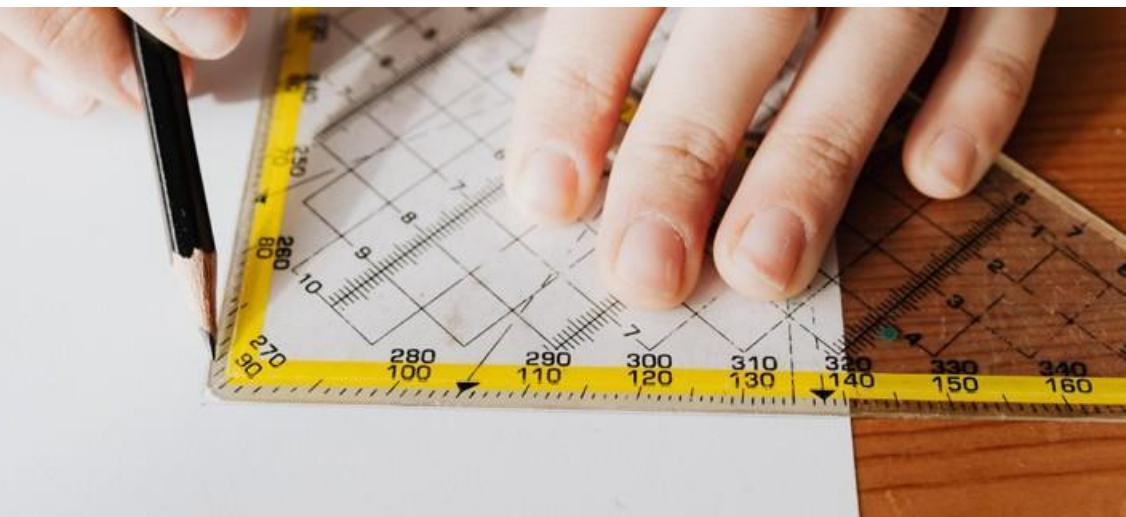


Figura 16 – Representação de retas coplanares / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz à esquerda estão escritas as representações analíticas da contenção das três retas pelo plano α . À direita, um plano é representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca com as retas contidas pelo plano. Estas retas estão representadas por linhas pretas e setas nas duas extremidades.

Duas retas podem ser paralelas, coincidentes, concorrentes ou perpendiculares, conforme você acompanhará na sequência.



1. Paralelas: quando as retas não apresentam ponto em comum.

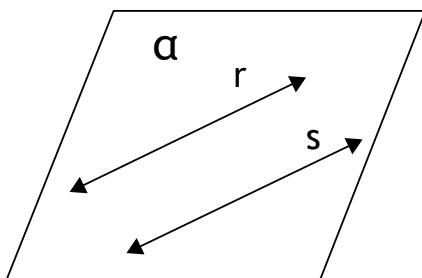


Figura 17 – Duas retas coplanares e paralelas / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: um plano está representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca, em que no canto superior esquerdo está a letra grega α representando o plano. Mais ao centro do paralelogramo, estão duas linhas pretas com setas nas extremidades representando retas do plano, r e s , respectivamente. Estas retas são paralelas.

Quando as retas são paralelas, representamos por $r \parallel s$, sendo que as retas não têm ponto comum, isto é, $r \cap s = \emptyset$.

2. Coincidentes: quando têm todos os pontos em comum.

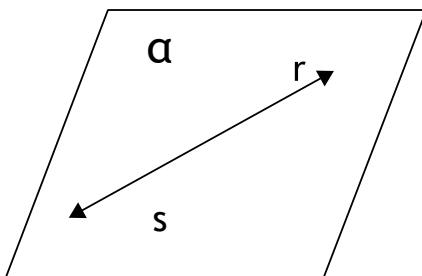


Figura 18 – Duas retas coplanares e coincidentes / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: um plano está representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca, em que no canto superior esquerdo está a letra grega α . Uma única linha preta desenhada ao centro com setas nas extremidades representa duas retas sobrepostas, r e s .

Indicamos por $r \cap s = r$ e $s \cap r = s$ e também $r \equiv s$.

3. Concorrentes: quando têm apenas um ponto em comum.

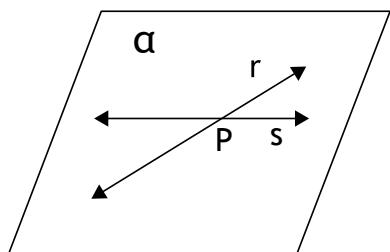


Figura 18 – Duas retas coplanares e concorrentes / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: um plano está representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca, em que no canto superior esquerdo está a letra grega α . Uma linha preta com setas nas extremidades e a letra r cruza outra linha preta com setas nas extremidades com a letra s , representando duas retas distintas que se encontram em um único ponto.

Indicamos neste caso: $r \cap s = \{P\}$.

4. Perpendiculares: quando duas retas concorrentes formam entre si ângulos retos.

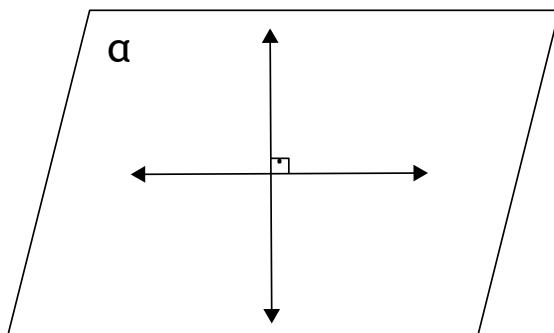


Figura 19 – Duas retas coplanares e concorrentes / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: um plano está representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca, em que no canto superior esquerdo está a letra grega α . Uma linha preta com setas nas extremidades e a letra r cruza outra linha preta com setas nas extremidades com a letra s , representando duas retas distintas que se encontram em um único ponto.

Esse é um tipo especial de concorrência e indicamos por: $r \perp s$.

Critério de paralelismo entre reta e plano

- **Critério 1:** se uma reta é paralela a uma reta de um plano, é paralela ao plano.
- **Critério 2:** se um plano contém duas retas concorrentes paralelas a outro plano, os planos são paralelos.

Critério de perpendicularidade entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, é perpendicular ao plano.

Critério de perpendicularidade entre dois planos

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, os dois planos são perpendiculares.

Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, elas têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas que passam por este ponto comum.

Indicamos que $r \perp \alpha$.

Retas reversas

Duas retas são reversas quando não são paralelas nem possuem ponto comum. Isto significa que não existe um plano que as contenha.

Podemos imaginar uma reta r desenhada no chão de uma sala e uma reta t , não paralela a r , desenhada no teto da mesma sala.

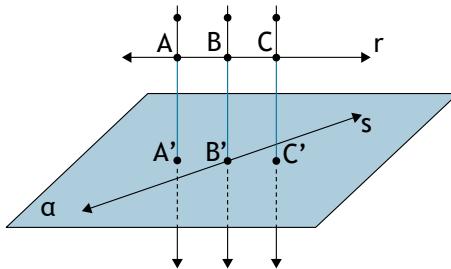


Figura 20 – Distância entre retas reversas / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um plano α em azul com uma reta s representada por um segmento preto com setas nas extremidades. Fora deste plano está uma reta r também representada por um segmento preto com setas nas extremidades.

ÂNGULOS

Há inúmeras aplicações do estudo sobre ângulos. Quando exemplificamos o problema de contenção da talude, na Figura 8, especificamos o ângulo de inclinação do plano. Este ângulo desempenha um papel fundamental na análise da situação física.

Evidentemente, em grandezas mecânicas o ângulo pode ser diretamente perceptível: um plano inclinado, como no exemplo da Figura 8. Em outras aplicações, pode não ser tão trivial de perceber, mas a aplicação existe.

Observe, por exemplo, a Figura 21.

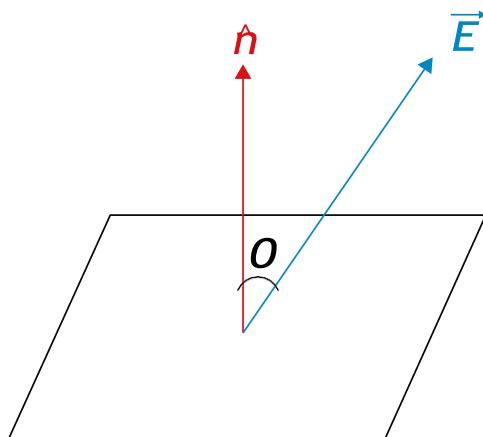


Figura 21 – Definição de fluxo elétrico por um plano / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: um plano está representado por um paralelogramo de bordas pretas e área branca. Dois vetores estão representados na figura: um vetor campo elétrico, pela reta azul com seta na extremidade e um vetor normal (perpendicular) ao plano apresentado pela reta vermelha com seta na extremidade. O ângulo entre os vetores é dado pela letra grega θ .

A definição de fluxo elétrico, por exemplo, requer o conhecimento da “quantidade” de campo elétrico que atravessa efetivamente a área dada pelo plano da Figura 22. Evidentemente, componentes paralelas do vetor campo elétrico não atravessam o plano, apenas componentes perpendiculares. Por isto, é fundamental especificar o ângulo: assim, é possível decompor o vetor e definir o fluxo efetivo que atravessa o plano.

Na óptica geométrica o conceito de ângulo está presente em todos os aspectos. A lei da reflexão, por exemplo, garante que o ângulo de incidência de um raio luminoso, ao ser refletido, o faz com igual ângulo de reflexão.

Com respeito ainda aos fenômenos ópticos, a refração consiste no desvio sofrido pela luz ao passar de um meio para o outro. Também neste caso o ângulo desempenha um papel fundamental.

Observe o canto da sala onde você está. A linha do rodapé é constituída por um segmento de reta. Este segmento se encontra no canto, com outro segmento de reta que desce pela parede lateral. Os dois segmentos de reta, ou as duas **retas-suporte** concorrem neste ponto, formando um ângulo de 90° . O canto da parede onde as retas se encontram, formando o ângulo, chamaremos de vértice.

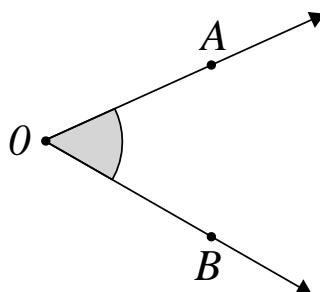


Figura 22 – Definição de ângulo plano / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura traz um ponto preto, denominado O, de onde saem dois segmentos de reta, representados por duas linhas pretas com setas nas extremidades. Cada linha apresenta um ponto, representado por círculo preto, com as letras respectivas, A e B.

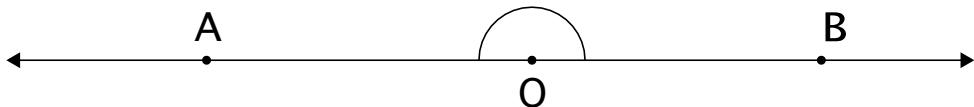
A figura formada por duas semirretas de mesma origem chama-se **ângulo**.

Na Figura 23, o ponto O é denominado **vértice** do ângulo, e as semirretas **OA e OB são chamadas de lados** do ângulo.

Indicamos o ângulo AOB escrevendo: AOB (lê-se “ângulo AOB”).

- **Ângulo raso ou de meia volta**

A figura formada por duas semirretas opostas chama-se **ângulo raso**, ou de **meia volta**.



Neste caso, a medida do ângulo é $m(AOB) = 180^\circ$.

Figura 23 – Ângulo raso ou de meia volta / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura traz uma linha preta com setas nas suas extremidades. À esquerda, um círculo preto mostra o ponto A. No centro, um círculo preto apresenta o ponto O e à direita o ponto B é representado por um círculo preto também. Ainda no centro, acima do círculo preto que representa o ponto O, há um semicírculo desenhado com linha preta, representando a meia volta dada por uma semirreta em relação à outra.

- **Ângulo nulo**

Quando a figura é formada por duas semirretas coincidentes.



Para este caso, a medida do ângulo é $m(AOB) = 0^\circ$.

Figura 24 – Ângulo nulo / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura traz uma linha preta com uma seta na extremidade esquerda e pontos coincidentes A e B desenhados como um círculo preto. Na extremidade direita, o ponto O também é representado por um círculo preto.

- **Ângulo reto**

É aquele que tem por medida 90° : $m(AOB) = 90^\circ$

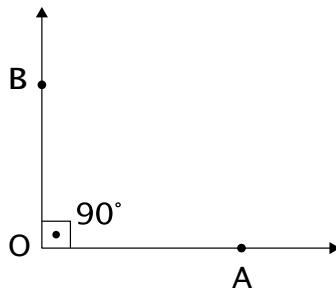


Figura 25 – Ângulo reto / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura mostra duas linhas pretas com setas em uma de suas extremidades e origem comum mostrada com a letra O. Pontos pertencentes a cada semirreta estão mostrados na imagem, com A pertencendo à primeira semirreta e B pertencendo à segunda semirreta, perpendicular à primeira. Um pequeno quadrado de bordas pretas contendo um círculo preto representa o ângulo reto.

▪ Ângulo agudo

É aquele cuja medida é menor do que 90° : $m(AOB) < 90^\circ$

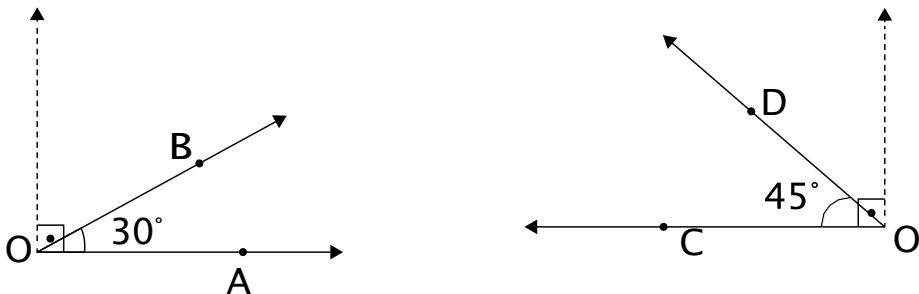


Figura 26 – Ângulo agudo / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz à esquerda duas semirretas estão representadas por linhas contínuas pretas formando um ângulo de 30° . Dois pontos pertencentes a cada uma dessas semirretas estão mostrados com as letras A e B, respectivamente. A linha preta tracejada faz um ângulo reto com a semirreta que contém o ponto A. À direita é mostrada uma situação semelhante, com duas semirretas representadas por linhas pretas contínuas com pontos C e D, respectivamente, tendo a mesma origem O e fazendo um ângulo de 45° entre si, também mostrado na imagem. Uma terceira semirreta desenhada em linha preta tracejada faz 90° com a semirreta que contém o ponto C.

▪ Ângulo obtuso

É aquele em que a medida é maior do que 90° e menor do que 180° :
 $90^\circ < m(AOB) < 180^\circ$.

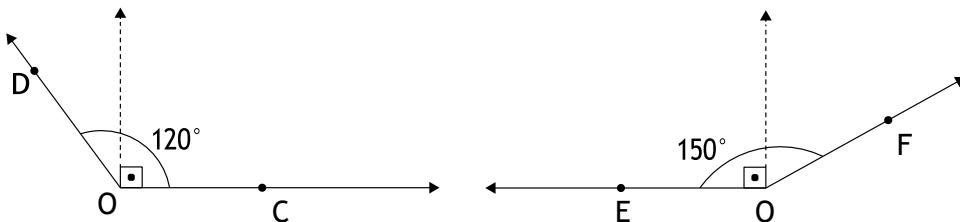


Figura 27 – Ângulo obtuso / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz à esquerda duas semirretas estão representadas por linhas contínuas pretas formando um ângulo de 120° . Dois pontos pertencentes a cada uma dessas semirretas estão mostrados com as letras C e D, respectivamente. A linha preta tracejada faz um ângulo reto com a semirreta que contém o ponto C. À direita, duas semirretas representadas por linhas pretas contínuas, contendo os pontos E e F, respectivamente, fazem um ângulo de 150° entre si. Nesta imagem da direita também é mostrada em linha preta tracejada a semirreta com ângulo reto em relação à semirreta que contém o ponto E.

▪ Ângulo de uma volta

Neste caso, também são duas retas coincidentes.



Para este caso, a medida do ângulo é $m(AOB) = 360^\circ$.

Figura 28 – Ângulo de uma volta / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: figura traz uma linha preta com uma seta na extremidade esquerda e pontos coincidentes A e B desenhados como um círculo preto. Na extremidade direita, o ponto O também é representado por um círculo preto. Ainda na extremidade direita, uma circunferência de borda preta e área branca representa uma volta dada por uma semirreta em relação à outra.

Os ângulos também podem ser classificados quanto à soma. Em outras palavras, os ângulos podem ser somados e eles podem completar 90° , 180° ou 360° .

1. Ângulos complementares

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° .

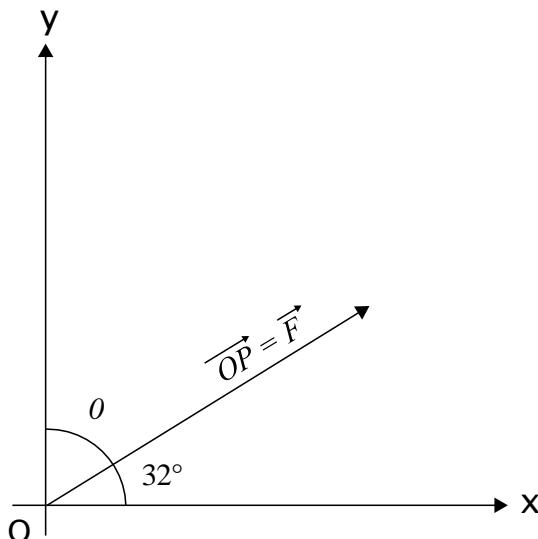


Figura 29 – Ângulos complementares / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um plano munido de coordenadas cartesianas. Os eixos coordenados estão desenhados em preto com setas em uma das extremidades. O ponto de encontro entre os eixos coordenados está representado pela letra "O", a origem. Um vetor, representado por um segmento de reta com seta em uma extremidade também é mostrado, localizando um ponto representado pela letra "P". A partir do eixo x positivo, é medido um ângulo de 32° para o vetor. Complementar a este ângulo está o ângulo θ , de maneira que a soma desses medidas desses dois ângulos resulte em 90° .

Na Figura 29, o vetor que localiza o ponto P é OP . Ele faz um ângulo de 32° com

o eixo x. Logo, como x e y são perpendiculares, então $\theta + 32^\circ = 90^\circ$

$$\theta = 90^\circ - 32^\circ$$

$$\theta = 58^\circ$$

2. Ângulos suplementares

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 180° .

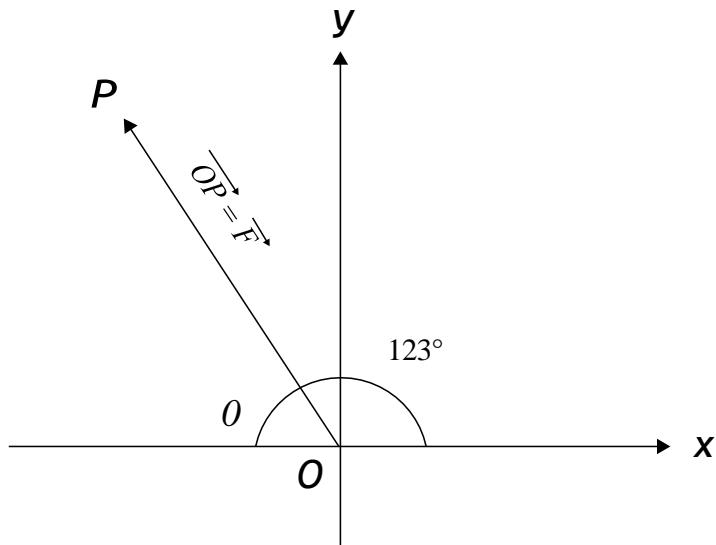


Figura 30 – Ângulos suplementares / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: na imagem, um plano munido de coordenadas cartesianas é mostrado. Os eixos coordenados estão desenhados em preto com setas em uma das extremidades. O ponto de encontro entre os eixos coordenados está representado pela letra "O", a origem. Um vetor, representado por um segmento de reta com seta em uma extremidade também é mostrado, localizando um ponto representado pela letra "P". A partir do eixo x positivo, é medido um ângulo de 123° para o vetor. É mostrado também o ângulo θ que somado a 123° resulta em 180° , constituindo assim ângulos suplementares.

Na Figura 30, o vetor OP localiza o ponto P agora no segundo quadrante. Ele faz um ângulo de 123° com o eixo x. Como meia volta corresponde a 180° , então a soma de θ com 123° são suplementares:

$$\theta + 123^\circ = 180^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 123^\circ$$

$$\theta = 57^\circ$$

3. Ângulos replementares

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 360° .

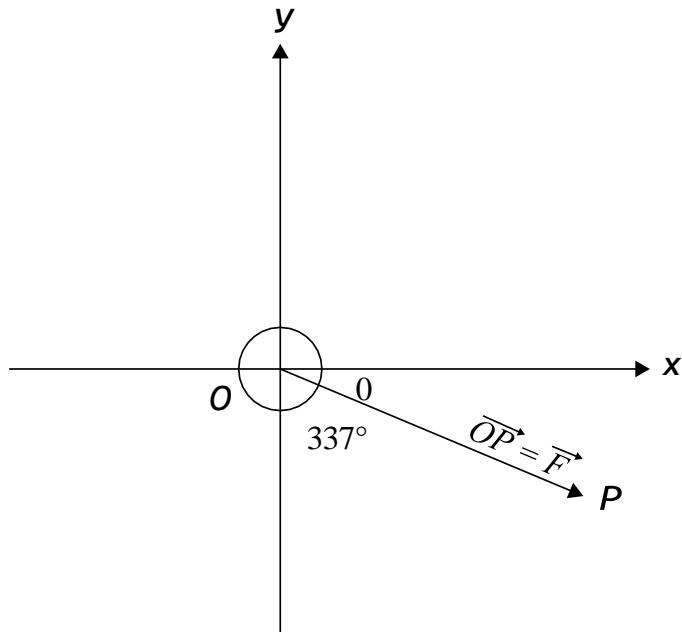


Figura 31 – Ângulos replementares / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: na imagem, um plano munido de coordenadas cartesianas é mostrado. Os eixos coordenados estão desenhados em preto com setas em uma das extremidades. O ponto de encontro entre os eixos coordenados está representado pela letra "O", a origem. Um vetor, representado por um segmento de reta com seta em uma extremidade também é mostrado, localizando um ponto representado pela letra "P". A partir do eixo x positivo, é medido um ângulo de 337° para o vetor. É mostrado também o ângulo θ que somado a 337° resulta em 360° , constituindo assim ângulos replementares.

Na Figura 31, o vetor que localiza o ponto P é OP , que agora se encontra no quarto quadrante. O vetor faz um ângulo de 337° com o sentido positivo de x. Como uma volta inteira corresponde a 360° , então os ângulos são replementares:

$$\theta + 337^\circ = 360^\circ$$

$$\theta = 360^\circ - 337^\circ$$

$$\theta = 23^\circ$$

Outras classificações dos ângulos podem ser acompanhadas na sequência.

Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes

Dois ângulos são consecutivos quando possuem um vértice e um lado comuns.

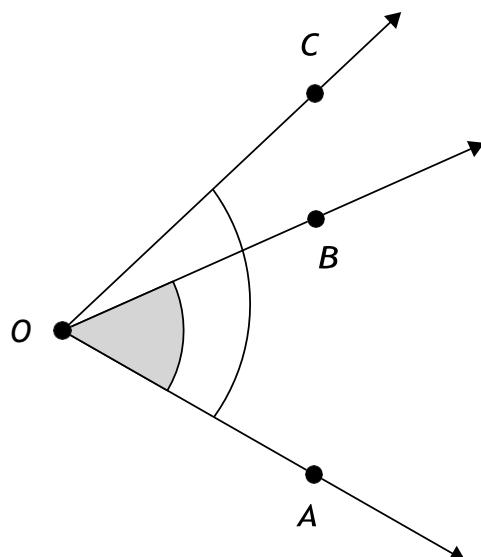


Figura 32 – Ângulos consecutivos / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz um círculo preto com a letra O para representar a origem das três semirretas desenhadas em linha preta e com setas nas extremidades. Em cada semirreta é mostrado um ponto, desenhado como um círculo preto com as letras A, B e C, respectivamente. Em cinza é mostrado o ângulo AOB e um arco preto apresenta o ângulo consecutivo AOC .

Na Figura 27, AOB e AOC são consecutivos, porque o vértice O e o lado \overrightarrow{OA} são comuns. Também, BOC e AOC são consecutivos, porque o vértice O e o lado \overrightarrow{OC} são comuns.

Também é possível perceber da Figura 27 que os ângulos são adjacentes, isto é, possuem um vértice e um lado comum, mas não possuem ponto interno comum.

Ângulos congruentes

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida, conforme ilustra a Figura 28.

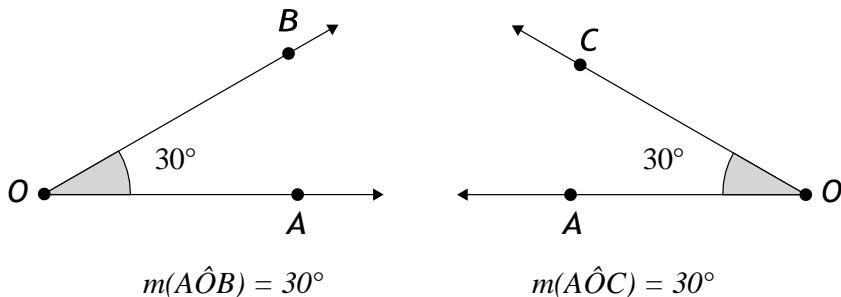


Figura 33 – Ângulos consecutivos / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz à esquerda, duas linhas pretas representam semirretas com a mesma origem no ponto O, representado por um pequeno círculo preto preenchido. Em cinza a medida do ângulo é mostrada e os pontos A e B pertencentes às semirretas também são mostradas nas linhas que representam as semirretas respectivas. À direita, uma representação similar da figura da esquerda, porém rotacionada em relação à primeira figura. As medidas dos ângulos são iguais. Posicionada abaixo de cada figura está a legenda da medida dos ângulos.

Os ângulos AOB e AOC têm a mesma medida de 30° . Dizemos que os ângulos são congruentes e escrevemos: $AOB \cong AOC$.

Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

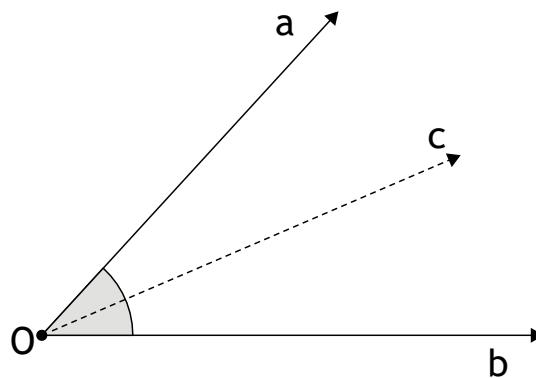


Figura 34 – Bissetriz de um ângulo / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz a um ponto O, representado pelo círculo preto, e três semirretas com mesma origem que saem do ponto O: a, b, em linha preta contínua, e c, em linha preta tracejada. As semirretas são representadas por linhas com setas na extremidade oposta à origem.

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro, como ilustra a Figura 35.

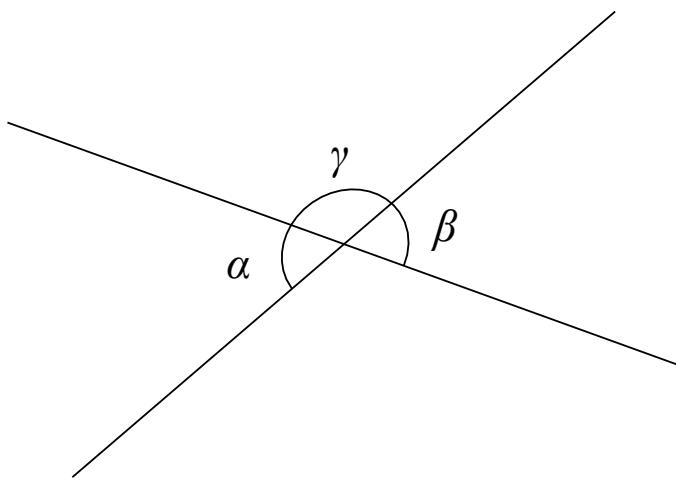


Figura 35 – Ângulos opostos pelo vértice / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz duas retas desenhadas em cor preta se interceptam e a figura apresenta três medidas de ângulos: α , β e γ .

Da Figura 35, $\alpha + \gamma = 180^\circ$ e $\beta + \gamma = 180^\circ$, o que permite eliminar γ para concluir que $\alpha = \beta$.

Por exemplo, considere que $\alpha = 2x + 10^\circ$ e $\beta = 40^\circ$. Eles serão ângulos opostos pelo vértice se, e somente se,

$$2x + 10^\circ = 40^\circ$$

$$2x = 40^\circ - 10^\circ$$

$$2x = 30^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Duas retas paralelas, r e s , cortadas por uma transversal t , formam oito ângulos que, dois a dois, recebem nomes especiais. A Figura apresenta esta construção.

Na Figura, é possível perceber os ângulos correspondentes:

- 1^\angle e 5^\angle
- 4^\angle e 8^\angle
- 2^\angle e 6^\angle
- 3^\angle e 7^\angle

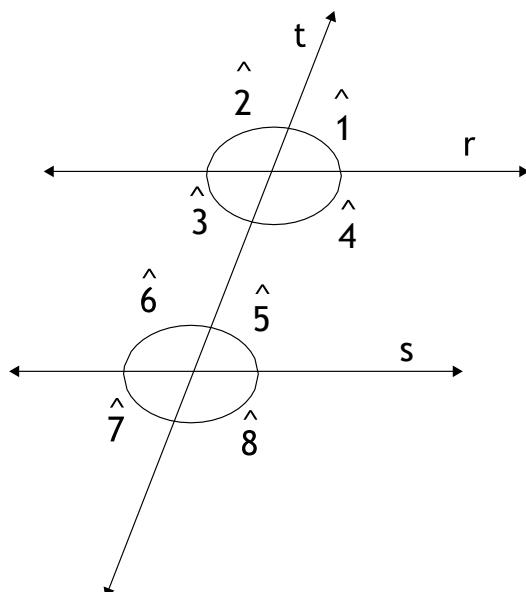


Figura 36 – Ângulos correspondentes.
Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura traz duas retas, r e s , que são cortadas por uma reta transversal t . As retas estão todas desenhadas em cor preta. Os ângulos e suas respectivas medidas são também apresentados na figura como 1^\angle , 2^\angle , 3^\angle , 4^\angle , 5^\angle , 6^\angle , 7^\angle e 8^\angle . Todas as linhas que representam as retas trazem setas nas duas extremidades.

Para ver o passo a passo, indicamos o vídeo na sequência.



EU INDICO

No vídeo, a professora e youtuber Gis apresenta os ângulos formados quando duas retas paralelas, r e s, são cortadas por uma transversal t.

Os ângulos também apresentam a sua unidade de medida. O grau ($^{\circ}$) é a unidade de medida que empregamos diariamente, embora no Sistema Internacional de Unidades, a unidade de medida para ângulo é o radiano (rad) (INMETRO, 2022).

O grau é representado por um número real positivo e tem por subdivisões minutos e segundos. Um minuto se representa por $1'$ e um segundo por $1''$. Assim, um grau tem sessenta minutos ($60'$) e cada minuto se divide em sessenta segundos ($60''$).



ZOOM NO CONHECIMENTO

Não confunda minutos e segundos do relógio com as medidas de um arco. São grandezas de espécies distintas: no relógio ou qualquer outro instrumento de medida de tempo, medimos o tempo, que tem uma definição bem precisa de acordo com o Sistema Internacional, com o padrão do segundo tomado como oscilações da radiação correspondente à transição de níveis específicos do estado fundamental do átomo de Cs^{133} . Já o minuto e segundo de arco são medidas de ângulo.

O instrumento para medir ângulos é o transferidor, conforme ilustra a Figura

37, e se você medir, por exemplo, 30° , esta medida é a mesma que $\frac{30^{\circ} \times \pi}{180^{\circ}}$ rad,

sendo $\pi = 3,14159\dots$ a constante matemática proveniente da razão entre o perímetro da circunferência pelo seu diâmetro, qualquer que seja a circunferência.

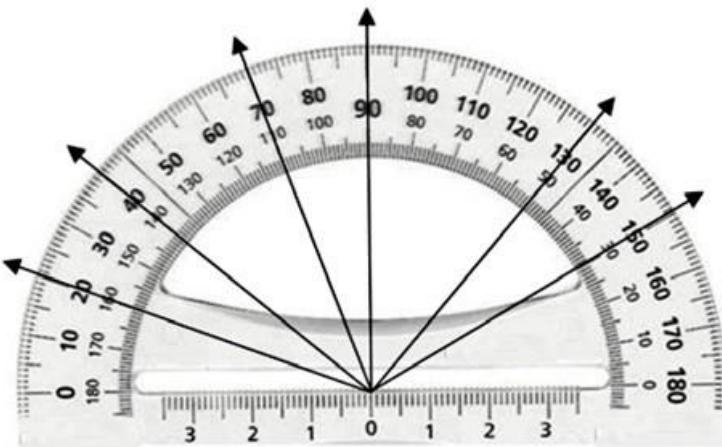


Figura 37 – O transferidor. / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura mostra a fotografia de um transferidor, que é um instrumento para medição de ângulo. Da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, o transferidor inicia em 0 e vai até 180° , ou meia-volta. Sobre a figura estão representados segmentos de reta orientados em preto, ilustrando medidas de seus ângulos.

Por meio da medida do comprimento da circunferência determina-se a medida de um radiano. A relação entre arco e ângulo é definida a partir do círculo trigonométrico, mas pode ser entendida simplesmente a partir de um experimento simples: tome um barbante e circunde uma circunferência qualquer, como a da Figura. Divida o perímetro medido pelo diâmetro da circunferência e o resultado é a constante π .

Se isto vale para todo o perímetro da circunferência, também vale para frações do perímetro. Note que, se C for o comprimento da circunferência e d o seu diâmetro, com r sendo o raio, então vale:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$C = 2\pi r$$

Como $2\pi = 360^\circ$, então também é verdade que $r\theta = S$, sendo θ o ângulo correspondente a um arco S .

Um exemplo de aplicação da definição do arco em radianos ocorre no movimento de rolamento, que é a combinação do movimento de translação e de rotação, como ilustrado pela Figura.

No caso da roda apresentada na Figura, o seu centro de massa se move com velocidade linear (de translação) igual a v , enquanto a roda gira de um ângulo θ . A mesma distância linear mostrada como S corresponde ao arco compreendido no ângulo θ . Assim, $S = r\theta$, com r sendo o raio da roda.

Consequentemente, a condição de rolamento sem deslizamento é que a velocidade do centro de massa obedeça à relação: $v = \omega r$, em que $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ é a velocidade angular da roda.

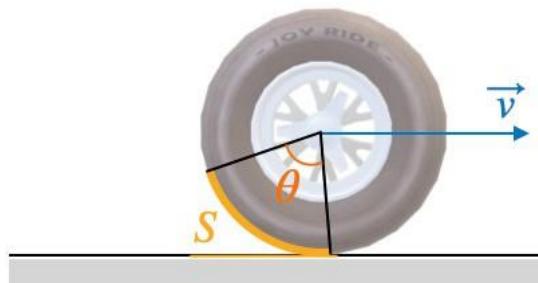


Figura 38 – O efeito combinado da rotação e translação / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a figura mostra a fotografia de um transferidor, que é um instrumento para medição de ângulo. Da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, o transferidor inicia em 0 e vai até 180º, ou meia-volta. Sobre a figura estão representados segmentos de reta orientados em preto, ilustrando medidas de seus ângulos.

Para exemplificar, considere um automóvel que se move a 80 km/h (22,22 m/s) com pneus de 75,0 cm de diâmetro. A velocidade angular dos pneus em torno dos eixos das rodas é:

$$v = \omega r$$

$$22,22 \text{ m/s} = \omega \cdot 0,375 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{22,22 \text{ m/s}}{0,375 \text{ m}}$$

$$\omega \approx 59,3 \text{ rad/s}$$

Para compreender a relação entre as unidades de medida de ângulo, a Figura 39 ilustra o círculo trigonométrico e a relação entre graus e radianos.

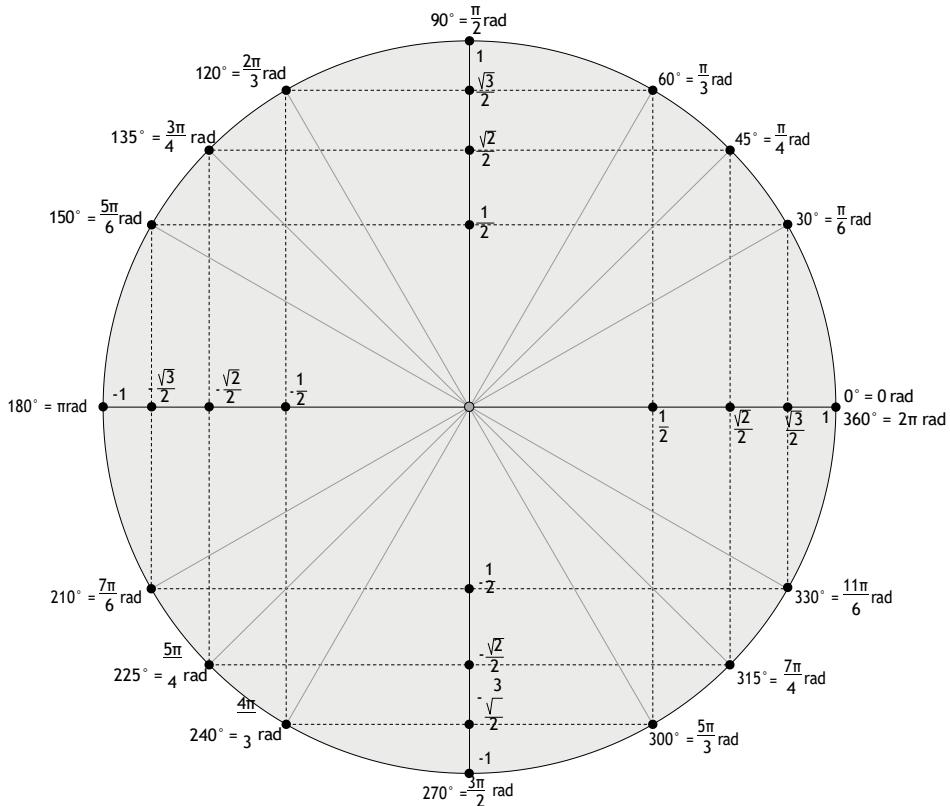


Figura 39 – O círculo trigonométrico e suas medidas / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura ilustra o círculo trigonométrico, representado pela circunferência em cor preta com preenchimento cinza. Vários pontos são mostrados sobre a circunferência e estão todos representados por pequenos círculos preenchidos em preto. No círculo trigonométrico da imagem, são mostrados também as medidas dos ângulos e as medidas respectivas com respeito ao eixo vertical (seno) e ao eixo horizontal (cosseno).

Para a conversão entre graus e radianos, basta efetuar uma regra de três a partir das relações de equivalência mostradas. Por este motivo, ao converter de graus

para radianos empregamos o fator de conversão $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

A determinação de áreas parte de um conceito bastante simples. O que precisamos entender é que para determinar a área de uma figura basta escolhermos uma unidade de medida, ou seja, uma unidade fundamental e, então, comparar a figura que se deseja determinar a área com a unidade fundamental escolhida.

Por exemplo, quando se deseja determinar a área de um retângulo, podemos subdividir a área a ser determinada em pequenos quadrados de lados unitários. Então, contamos o número de quadrados necessários para preencher a área e este valor será numericamente igual a área que se deseja determinar.

Esse princípio fundamental já havia sido percebido pelos gregos e, com o passar dos séculos, culmina na noção de integral, desenvolvida por Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716).

Quadrado e retângulo

A área de uma região quadrada, cujo lado mede ℓ unidades de comprimento é igual a $S = \ell \times \ell = \ell^2$.

Se um quadrado tem lado igual a $\ell = 10\text{ cm}$, por exemplo, a sua área será de $S = \ell^2 = (10\text{ cm})^2 = 100\text{ cm}^2$.

Portanto, a área do quadrado é de 100 cm^2 .

A ideia de subdividir a área continua a mesma, de modo que é possível cobrir o retângulo com quadrados unitários. A soma das áreas dos quadrados resulta na área do retângulo, de modo que, se a for a base e b a altura do retângulo, teremos:
 $S = a \times b$ $S = a \times$.

Considere um retângulo de base igual a 10 cm e altura igual a 5 cm . A sua área é, então,

$$S = 10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$$

$$S = 50\text{ cm}^2$$

Em outras palavras, se cada quadrado tiver 1 cm^2 de área e, portanto, 1 cm de lado, então cabem 50 quadrados dentro do retângulo dado, conforme ilustra a Figura 40.

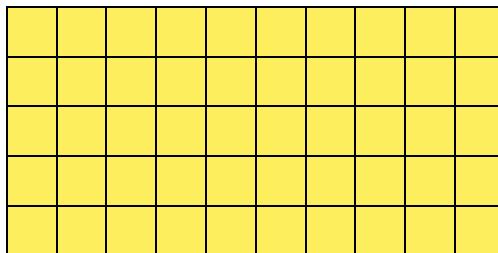


Figura 40 – Retângulo e quadrados unitários / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um retângulo de base maior do que a altura, desenhado com bordas pretas e fundo amarelo. Cinquenta quadrados de bordas pretas e sem fundo preenchem completamente o retângulo.

Paralelogramo

A área da região limitada por um paralelogramo é encontrada multiplicando-se o seu comprimento (base) pela sua largura (altura), ou seja:

$$S = a \times b$$

Considere um paralelogramo de base igual a 20 cm e altura igual a 10 cm. A área deste paralelogramo será, então, igual a

$$\begin{aligned} S &= 20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \\ &= 200 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

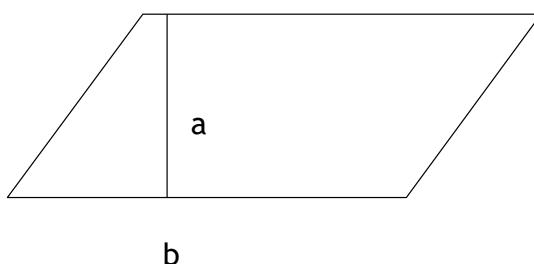


Figura 41 – O paralelogramo / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz um paralelogramo constituído por quatro segmentos de reta desenhados em cor preta. Os segmentos paralelos apresentam comprimentos iguais e dois elementos estão destacados na figura: a base, representada pela letra "b" e a altura, representada pela letra "a".

Uma aplicação física consiste no cálculo da intensidade do torque necessário para produzir uma rotação em um corpo.

O torque é uma grandeza vetorial e é o análogo da força na rotação. Quando uma força, que é uma grandeza física vetorial, é aplicada em um certo ponto em um corpo, então o efeito prático possível é um giro em torno de um eixo de rotação.

Um paralelogramo pode ser construído com o vetor força, \vec{F} , e o vetor posição, \vec{r} , que localiza o ponto de aplicação da força, como mostra a Figura, em que uma força F é aplicada em um ponto P, localizado pelo vetor r a partir do eixo de rotação em O.

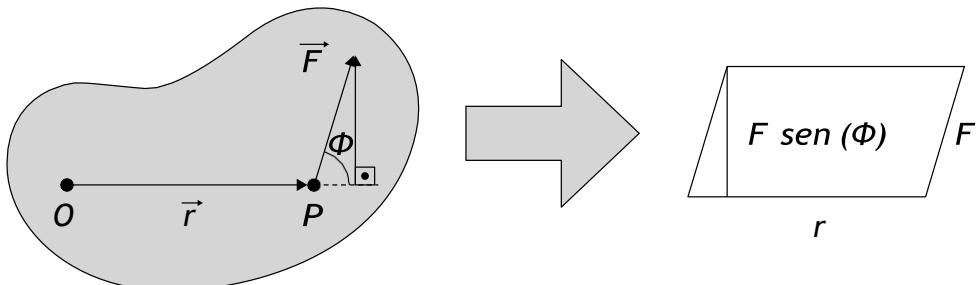


Figura 42 – O torque e o seu módulo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um corpo de forma indeterminada desenhado com bordas pretas e fundo cinza, representando um corpo qualquer ao qual se aplica uma força, esta representada pelo vetor preto \vec{F} . O ponto P mostra o ponto de aplicação da força, que está a uma distância r do eixo de rotação O. O ângulo entre a força e o vetor que localiza o ponto de aplicação da força é mostrado como ϕ . A componente perpendicular da força é mostrada também na imagem e uma seta cinza mostra a construção de um paralelogramo cujos lados são expandidos pelos vetores r e F . O paralelogramo é mostrado com bordas pretas e fundo branco e o cálculo da sua área fornece a intensidade do torque, que produz o giro no corpo.

A área do paralelogramo formado pelos lados r e F é, portanto:

$$\tau = r \cdot F \cdot \sin(\phi)$$

em que τ é o torque, ou momento de uma força em relação a um ponto, e ϕ é o ângulo formado entre r e F .

Por exemplo, se a distância entre a dobradiça de uma porta e a maçaneta for de 60 cm, e uma força de 1 N for aplicada, formando um ângulo de 30° com o plano da porta, então o torque será:

$$\tau = (0,6 \text{ m}) \cdot (1 \text{ N}) \cdot \sin(30^\circ)$$

$$= 0,6 \cdot \frac{1}{2} \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$= 0,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Assim, o torque de 0,3 Nm produz na porta uma rotação, ou seja, uma aceleração angular.

Losango

A área da região limitada por um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais:

$$S = \frac{\text{diagonal maior} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$$

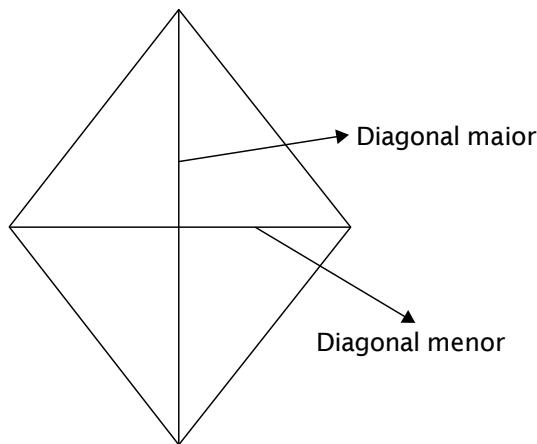


Figura 43 – O losango / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz um losango representado por quatro segmentos de reta desenhados em cor preta. A partir de cada ângulo é traçado um segmento de reta até o ângulo oposto, todos em cor preta, e representando as diagonais do losango. Segmentos de retas pretos com setas nas extremidades apontam para a descrição de cada diagonal, na figura explicitamente descritos por “Diagonal maior” e “Diagonal menor”.

Para ilustrar, considere um losango que possui suas diagonais medindo 10 cm e 16 cm. Assim:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{10 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm}}{2} \\
 &= \frac{160}{2} \text{ cm}^2 \\
 &= 80 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Portanto, a área do losango com diagonais iguais a 10 cm e 16 cm vale 80 cm^2

Trapézio

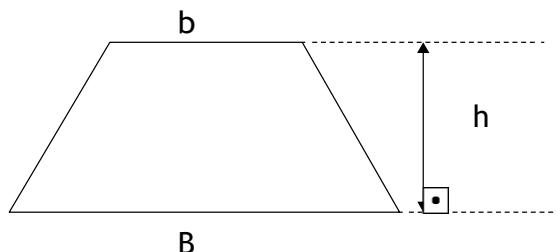


Figura 44 – O trapézio / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: imagem traz um trapézio composto por dois segmentos de retas paralelos e outros dois segmentos completando a figura, todos desenhados em cor preta. A base maior do trapézio está representada pela letra "B", enquanto a base menor pela letra "b". Dois segmentos de retas tracejadas seguem das bases maior e menor para indicar a altura, representada pela letra "h". A medida da altura é representada pelo segmento de reta contínuo com setas duplas, desenhado perpendicularmente à base maior, o que é indicado pelo símbolo constituído por um pequeno quadrado com um círculo preto interior a este.

A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases maior e menor.

$$S = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$$

Seja, por exemplo, um trapézio de base maior igual a 10 cm, base menor igual a 6 cm e altura 3 cm. Deste modo:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{(10 \text{ cm} + 6 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm}}{2} \\
 &= \frac{16 \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 \\
 &= 24 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Uma aplicação frequente ocorre no cálculo de áreas de gráficos que representam fisicamente alguma grandeza de interesse.

Considere, por exemplo, um motorista dirigindo um carro com velocidade constante e igual a 10 m/s quando percebe algo que o obriga a desacelerar de maneira constante o carro. Um gráfico da velocidade em função do tempo para esta situação está ilustrada na Figura 44. Deseja-se saber qual é a distância percorrida pelo motorista até que o carro pare completamente.

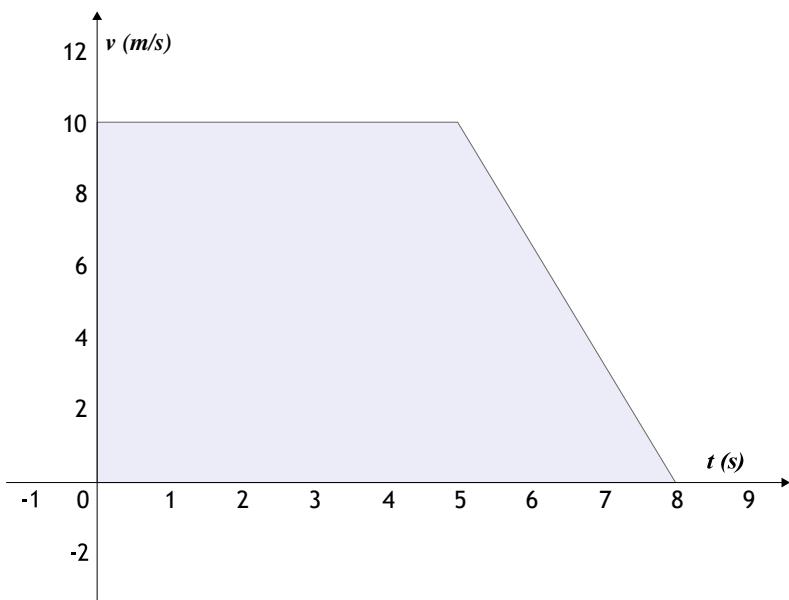


Figura 45 – A velocidade em função do tempo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um plano munido de coordenadas cartesianas, representadas por segmentos de retas pretas com seta em uma de suas extremidades, indicando os valores crescentes. O plano é quadriculado como o de um papel milimetrado e um gráfico é apresentado: uma reta paralela ao eixo horizontal desde $t = 0$ até $t = 5$ s, seguido de uma reta decrescente a partir de $t = 5$ s até $t = 8$ s. O gráfico está construído em cor preta, mas a área sob o gráfico é representado em cor de tom azul. No eixo vertical está representada a velocidade, dada em metros por segundo, enquanto no eixo horizontal, o tempo está representado em segundos. A escala horizontal mostrada é de -1 até 9 e a escala vertical mostrada é de -2 até 12.

Note, que a Figura 44 mostra o carro em velocidade constante e igual a 10 m/s entre os instantes $t = 0$ e $t = 5$ s. Logo em seguida o motorista inicia a frenagem e para no instante $t = 8$ s, ou seja, 3 s após o início da desaceleração.

Observe também que a área hachurada no gráfico fornece a distância percorrida pelo motorista durante todo o percurso e que o perímetro encerrado compõe um trapézio de base maior 8 s e base menor 5 s, enquanto a altura é de 10 m/s.

Substituindo na fórmula da área do trapézio, temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(8+5) \cdot 10}{2} \\ &= \frac{13 \cdot 10}{2} \\ &= \frac{130}{2} \\ &= 65 \end{aligned}$$

Portanto, desde o início do movimento até a parada do carro são percorridos 65 m.



Triângulo

Há várias maneiras de expressar a área de um triângulo. De um modo geral, se b for a base e h a altura, então:

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

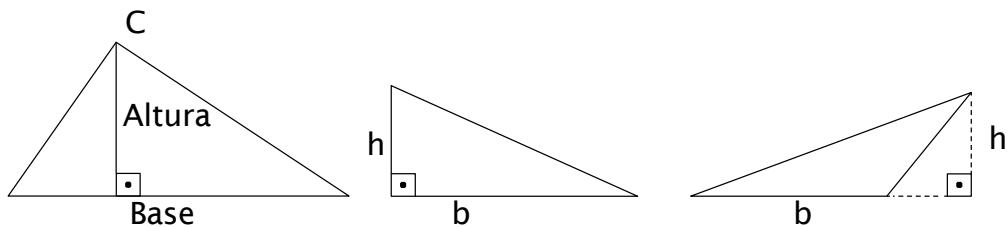


Figura 46 – Triângulos / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a figura traz três triângulos todos desenhados com segmentos de retas pretas contínuas. Da esquerda para a direita, o primeiro triângulo é composto ainda pelos textos "Base", para indicar a base do triângulo e "altura", para indicar a sua altura, que está representada na figura por um segmento de reta que vai da base até o ponto C, construído perpendicularmente à base, o que é representado por um pequeno quadrado com um ponto preto interior a este. A segunda figura traz um triângulo em que um dos ângulos é reto, chamado de triângulo retângulo, cuja base está representada pela letra "b" e a altura pela letra "h". A terceira imagem traz um triângulo com base "b" e altura "h", mostrada a partir da construção com segmentos de reta tracejados, de maneira que a altura seja medida perpendicularmente à base, o que é representado pelo pequeno quadrado no canto inferior direito com um círculo preto interior a este.

Podemos empregar o cálculo da área de um triângulo também para o cálculo de áreas em gráficos, cujo resultado representa uma grandeza física. Este é o caso do trabalho, por exemplo.

O trabalho é um conceito fundamental em física e está diretamente associado às trocas de energia em um sistema, que pode ser mecânico, termodinâmico ou eletromagnético.

Considere, por exemplo, um gás em um recipiente com um êmbolo. Este gás ocupa um volume V e apresenta uma pressão P . O sistema é, então, levado a um aumento de pressão por um processo isocórico (a volume constante) e depois uma expansão é realizada com a conseqüente diminuição da pressão. Finalmente, o sistema é conduzido ao estado inicial por uma compressão isobárica (a pressão constante).

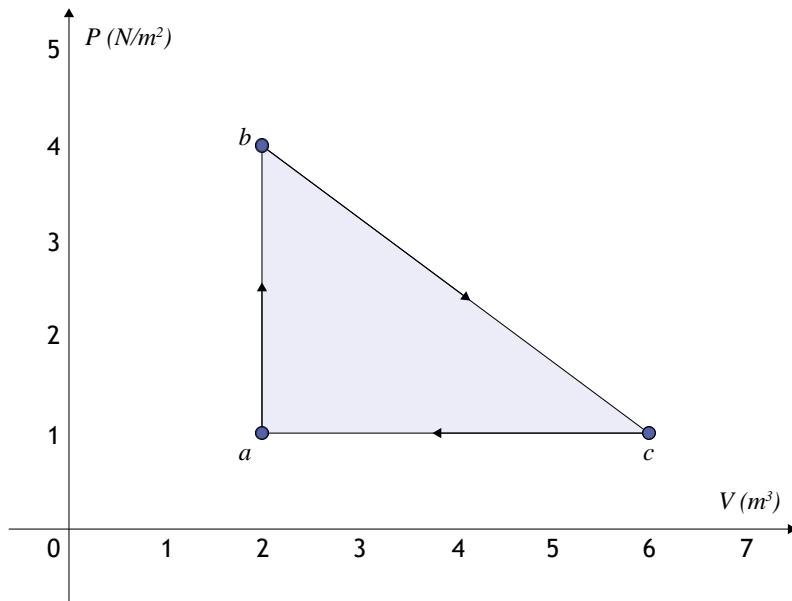


Figura 47 – A velocidade em função do tempo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: a imagem traz um plano munido de coordenadas cartesianas, representadas por segmentos de retas pretas com seta em uma de suas extremidades, indicando os valores crescentes. O plano é quadriculado similar ao de um papel milimetrado e três segmentos de reta representam um processo cíclico: partindo do estado inicial a, seguindo para b, depois c e, finalmente, retornando ao estado a. O eixo horizontal representa o volume, em metros cúbicos e a sua escala inicia em 0 até 7, enquanto o eixo vertical representa a pressão em newtons por metros quadrado (ou pascais), e a sua escala se inicia em 0 e termina em 5.

O sistema termodinâmico em questão é levado de um estado inicial a até um estado b. Posteriormente, ocorre a expansão de b para c e, finalmente, completando o ciclo, o sistema é levado novamente do estado c para o estado a.

Para que possamos calcular o trabalho realizado por ciclo, podemos calcular numericamente o valor da área hachurada no gráfico que corresponde à área de um triângulo de base $6 \text{ m}^3 - 2 \text{ m}^3 = 4 \text{ m}^3$ e altura igual a $4 \text{ Pa} - 1 \text{ Pa} = 3 \text{ Pa}$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} S &= \frac{4 \times 3}{2} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho realizado por ciclo é de 6 J (joules).

Círculo

Observe a sequência de regiões poligonais regulares inscritas na circunferência da Figura 36.

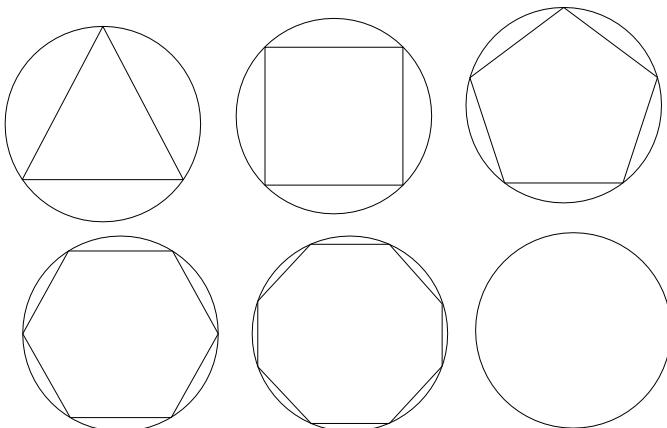


Figura 48 – Polígonos inscritos em um círculo / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem apresenta seis figuras compostas por um polígono inscrito em um círculo. Todos os elementos estão em preto. Da esquerda para a direita e de cima para baixo, a primeira imagem traz um triângulo inscrito em um círculo. A segunda imagem traz um quadrado inscrito em um círculo. A terceira imagem, traz um pentágono inscrito no círculo. Na quarta imagem, um hexágono está inscrito no círculo, enquanto na quinta imagem, um octógono está inscrito no círculo. Finalmente, a sexta imagem traz apenas um círculo. Quando lido da esquerda para a direita, evoca-se a noção de que com o aumento do número de lados de um polígono inscrito no círculo, mais conforme ao círculo se torna o polígono.

À medida que o número de lados aumenta, o polígono regular tende a confundir-se com a circunferência.

Assim, o perímetro tende a aproximar-se cada vez mais do comprimento da circunferência, que é $2\pi R$, e o apótema, que é o segmento que liga o centro do polígono até qualquer um dos seus lados, tende a se aproximar cada vez mais do raio da circunferência.

Com um número de lados muito grande, a região poligonal se confunde com o círculo e sua área tende a coincidir com a área do círculo.

Como a área da região limitada por um polígono regular é dada pelo produto do semiperímetro pelo apótema, então a área do círculo é:

$$S = \frac{1}{2} (2\pi R) \Rightarrow S = \pi R^2$$

VOLUMES

Vamos apresentar o cálculo de volume de alguns sólidos que aparecem com certa frequência nas aplicações físicas.

Aqui também poderíamos seguir a ideia fundamental de subdividir o volume que se deseja determinar em pequenas unidades fundamentais de volume e somá-las.

A rigor, todas as expressões que apresentaremos agora podem ser obtidas desta maneira.

Prisma

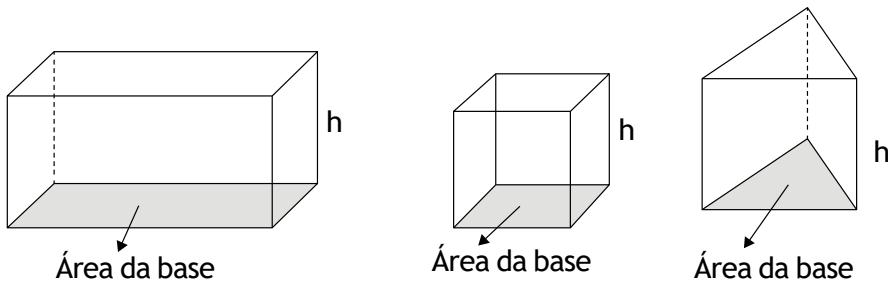


Figura 49 – Prismas / Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz três prismas construídos com segmentos de retas pretas e área da base hachurada. Da esquerda para a direita, o primeiro é um prisma de base retangular, enquanto o segundo é um prisma de base quadrada e o terceiro é um prisma de base triangular. Nas três imagens a altura é mostrada com a letra "h".

Para o cálculo do volume de um prisma, precisamos conhecer a sua área da base. De qualquer modo, o volume de um prisma é dado pelo produto da área de sua base pela altura:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

Por exemplo, para um prisma de área quadrada, evidentemente a área da base é a de um quadrado de lado conhecido.

Vamos supor que um cubo tem arestas iguais a 2 cm. Neste caso, a área da base vale $(2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$ e como a altura vale 2 cm também, então o volume do cubo será:

$$V = (4 \text{ cm}^2) \cdot (2 \text{ cm}) \\ = 8 \text{ cm}^3$$

Este resultado é equivalente a: $V_{\text{cubo}} = \ell^3$, com ℓ sendo a aresta do cubo.

Por outro lado, para um prisma de base retangular, de base a e profundidade b, cuja altura vale c, teremos como área da base: $a \cdot b$, o que fornece para o volume: $V = a \cdot b \cdot c$.

Assim, se um paralelepípedo apresenta lados $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ e $c = 2 \text{ cm}$, então o seu volume será:

$$V = (4 \text{ cm}) \cdot (3 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) \\ = 24 \text{ cm}^3$$

Esfera

Esfera é o sólido obtido fazendo-se a rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro. Com esse movimento, cada ponto do semicírculo descreve uma circunferência que tem com centro um ponto qualquer do diâmetro e cujo raio se torna maior à medida que aumenta a sua distância ao eixo.

Todos os pontos da superfície esférica estão à mesma distância de um ponto O chamado centro, conforme ilustra a Figura 49.

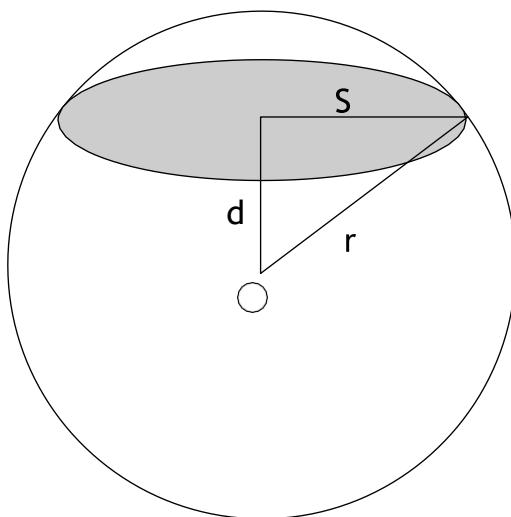


Figura 50 – Esfera
Fonte: adaptada de Dapiaz e Bona (2014).

Descrição da Imagem: a imagem traz a representação de uma esfera a partir do desenho de uma circunferência de borda preta e fundo branco, em que é mostrada também a intersecção com um plano formando o círculo, preenchido em cinza. O centro da esfera é mostrado com a letra "O" e o raio "r". O raio da seção é "s" e distância "d" até o centro da esfera.

Matematicamente, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a um ponto O (centro) é menor ou igual a uma distância r dada.

A intersecção de um plano com uma esfera que se corta é sempre um círculo. Quando o plano passa pelo centro da esfera, a secção é o chamado círculo máximo. Quando o plano passa fora do centro da esfera, determina uma secção de raio s.

A relação entre a distância do centro, o raio da secção e o raio da esfera é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$r = d^2 + s^2$$

Para uma esfera, sendo r o seu raio, teremos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Considere, por exemplo, um tanque esférico capaz de armazenar água. Suponha que o tanque O volume ocupado pelo tanque de raio $r = 3,00\text{ m}$ é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi (3,00\text{ m})^3 \\ &= 12\pi \text{ m}^3 \\ &\approx 37,7 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Como 1 L é equivalente a $1\text{ dm}^3 = 1 \times 10^{-3}\text{ m}^3$, então este tanque tem capacidade de:

$$\frac{1\text{ L}}{10^{-3}\text{ m}^3} \times 37,7 \text{ m}^3 = 37,7 \times 10^3 \text{ L}$$

Logo, o tanque ocupa um volume de $37,7 \text{ m}^3$ e sua capacidade é de trinta e sete mil litros.

Cilindro

Para o cálculo do volume de um cilindro, também precisamos levar em consideração a sua área da base. O cálculo do volume, deste modo, é bastante simples. Se r for o raio da sua base e h a altura do cilindro, então:

$$\begin{aligned}I &= A_{\text{base}} \cdot h \\&= \pi r^2 \cdot h\end{aligned}$$

Uma vez que a base é constituída por uma circunferência.

Seja por exemplo um cilindro cuja base é circular e de raio igual a 5 cm, enquanto a sua altura vale 10 cm. Logo:

$$\begin{aligned}V &= \pi (5 \text{ cm})^2 \cdot (10 \text{ cm}) \\&= 250\pi \text{ cm}^3 \\&\approx 785 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

O volume deste cilindro será, então, igual a 785 cm^3 .

Aplicações do cálculo de áreas e volumes

Definimos a densidade como a razão entre massa, m , e volume, V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

A densidade é uma característica do material. Ela depende de outros fatores, como a temperatura, mas dentro de uma faixa específica de temperaturas, ela é constante.

Por exemplo, um cilindro maciço feito de chumbo apresentará uma determinada densidade: você mede a massa e calcula o seu volume. A razão de um para o outro fornecerá um valor. Por mais que você tome agora outro cilindro de massa menor, o volume terá variado em igual proporção, pois a densidade do chumbo é a mesma.

Assim, se tivermos sólidos regulares, podemos determinar a densidade usando uma balança para aferir massa e o cálculo do volume do sólido regular.

Há no entanto, uma série de aplicações que empregam sólidos irregulares e, para isso, o princípio de Arquimedes do empuxo pode ser utilizado com uma balança de mola, por exemplo, verificando que em água o objeto pesa menos do que no ar. A diferença entre os pesos medidos está diretamente relacionada com a densidade do sólido irregular, um método conhecido como balança de Jolly.

Quando Arquimedes precisou resolver o problema proposto pelo rei, ele havia percebido justamente a noção de densidade: massas iguais de mesmo material devem deslocar quantidades iguais de água. Em outras palavras, devem receber o mesmo empuxo.

Não é somente no cálculo da densidade que o volume dos sólidos ou áreas aparecem. Na eletrostática, muitas vezes precisamos definir a chamada densidade superficial de carga ou até mesmo a densidade linear de carga. Este tipo de grandeza fornece a informação da distribuição de cargas em um determinado material, que pode ser um fio bastante longo, em comparação com o seu diâmetro, ou uma placa, de espessura muito pequena quando comparada com as dimensões da área.

Na cinemática, o estudo do movimento é feito analisando gráficos da posição, velocidade e aceleração em função do tempo. O cálculo da área sob a curva dos gráficos da velocidade e da aceleração, fornecem o deslocamento e a velocidade, respectivamente de um móvel.

Áreas e volumes também estão presentes em definições importantes como o trabalho, que corresponde à variação da energia em um sistema. Este sistema pode ser mecânico ou termodinâmico.

Finalmente, considere o sangue fluindo a uma velocidade 30,0 cm/s na artéria aorta, cujo raio vale 1,00 cm. No estudo dos fluidos, que engloba tanto líquidos quanto gases, definimos uma relação fundamental entre área e velocidade de escoamento, a chamada vazão ou vazão volumétrica, que é dada pelo produto entre a área de secção transversal e a velocidade de escoamento do fluido.

Podemos considerar a aorta como um cilindro de área circular e raio igual a 1,00 cm. Neste caso, a área de secção transversal da aorta é:

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot (1,00 \text{ cm})^2 \\ &= \pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Sendo $v = 30,0 \text{ cm/s}$, então a vazão será de:

$$(30,0 \text{ cm/s}) \cdot (\pi \text{ cm}^2) = 30,0\pi \text{ cm}^3/\text{s}$$
$$\approx 94,2 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Ainda podemos escrever $94,2 \text{ cm}^3/\text{s} = 94,2 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$.

Empregando o fator de conversão utilizado anteriormente entre volume e capacidade, resulta em:

$$\frac{1 \text{ L}}{10^{-3} \text{ m}^3} \times 94,2 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 94,2 \times 10^{-3} \text{ L}$$

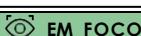
Ainda temos que

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times 1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min}$$

Portanto, a vazão na aorta pode ser escrita como:

$$94,2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = \frac{94,2 \times 10^{-3} \text{ L}}{\frac{1}{60} \text{ min}}$$
$$= 5652 \times 10^{-3} \text{ L/min}$$
$$\approx 5,65 \text{ L/min}$$

Assim, durante cada minuto, cerca de 5,6 litros de sangue atravessam a aorta. Este resultado está de acordo com o volume médio de sangue no corpo humano.



Confira a aula referente a este tema.

NOVOS DESAFIOS

Você estudou alguns conceitos de geometria plana, quando tratamos do ponto, reta e plano, e também alguns conceitos de geometria espacial, quando tratamos do espaço e dos sólidos.

Na geometria plana, definimos o ponto, capaz de dividir a reta em duas partes, a reta, capaz de dividir o plano em duas partes e o espaço. A reta é a trajetória típica da luz e a formação de imagens em espelhos, lentes e, principalmente, na retina dos nossos olhos, segue o princípio da propagação retilínea da luz.

Quanto à geometria espacial, especialmente no cálculo de volumes, quando Arquimedes entrou na banheira na famosa história da coroa do rei, ele percebeu que a água transbordava. Este fato foi o suficiente para ele provavelmente mergulhar vários objetos em água e perceber quanta água era derramada pelo objeto mergulhado.

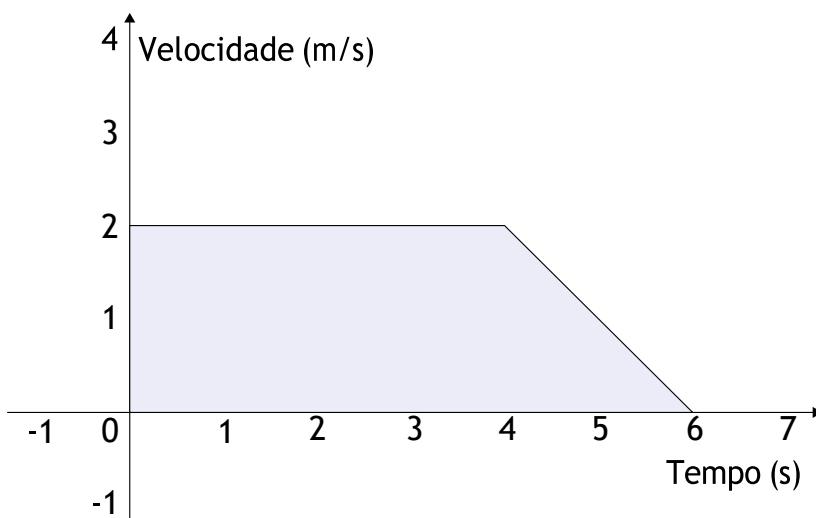
O gênio de Arquimedes logo notou que por mais que os objetos tivessem formatos diferentes, se eles tivessem a mesma massa, deveriam fazer transbordar a mesma quantidade de água.

Este é o princípio do empuxo de Arquimedes: um corpo submerso em um fluido, desloca uma porção deste fluido que, se for pesado, fornecerá a intensidade da força que o objeto sente. Assim, empuxo é o peso de volume de fluido deslocado pelo corpo.

VAMOS PRATICAR

- A área da região limitada por um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases maior e menor.

A figura mostra o gráfico da velocidade de um carro em função do tempo de um motociclista que dirigia com velocidade constante e ao avistar o semáforo fechado, inicia uma desaceleração constante até parar. Observe que o móvel está com velocidade constante entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$ s. Depois disto, o móvel começa a frear com desaceleração constante entre os instantes $t = 4$ s e $t = 6$ s. Determine o deslocamento percorrido pelo móvel durante todo o movimento.



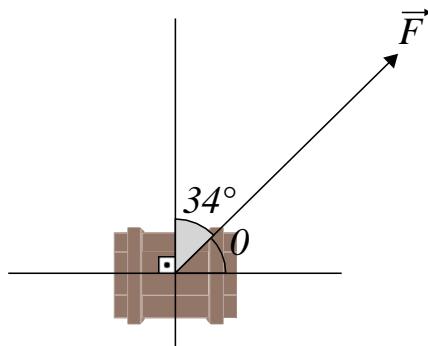
- Um cubo é um prisma com todas as faces congruentes. Assim, todas as faces são quadrados. Para calcular o volume de um cubo, basta multiplicar as medidas das três dimensões: comprimento, largura e altura.

A densidade de um material é definida como sendo a razão entre a massa de uma amostra deste material dividida pelo seu volume. Determine a densidade de um cubo feito de madeira cuja massa vale 5,76 g e aresta igual a 2,00 cm.

VAMOS PRATICAR

3. Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° são chamados ângulos complementares.

Sobre uma caixa que repousa em um plano é aplicada uma força de intensidade F , representada pelo vetor \vec{F} na figura. Esta força faz um ângulo de 34° com o eixo vertical. Assinale a alternativa que contém corretamente o valor e o nome dado ao ângulo θ mostrado na figura.



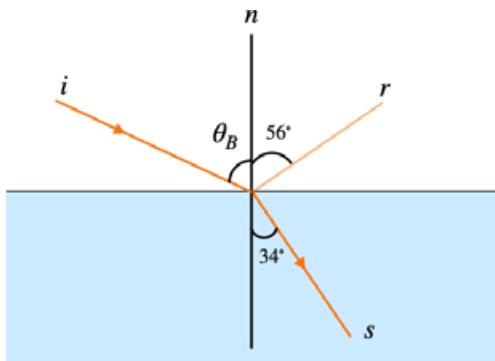
- a) Ângulo complementar de 56° .
 - b) Ângulo suplementar de 146° .
 - c) Ângulo reto de 90° .
 - d) Ângulo agudo de 45° .
 - e) Ângulo replementar de 200° .
4. Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° são chamados ângulos complementares.

Um fenômeno extremamente importante na óptica é o da polarização. Durante o percurso da luz de uma fonte qualquer, os campos elétrico e magnético oscilam com direções que variam com o tempo, embora permaneçam sempre perpendiculares à direção de propagação da luz. A polarização faz com que apenas algumas componentes dos campos elétricos e magnéticos possam ser transmitidas. Este princípio é aplicado aos óculos escuros. Uma maneira de polarizar a luz é por meio da reflexão. Ao incidir no interstício de dois meios, parte da luz é refletida e parte é refratada. Quando o raio refletido for perpendicular ao raio refratado, então ocorre este tipo de polarização por reflexão. O ângulo do raio incidente para o qual isto ocorre é chamado de ângulo de Brewster. As alternativas apresentam figuras de situações hipotéticas em que um raio incidente (segmento i) na superfície da água é parcialmente refletido (segmento r) e refratado (segmento s). Em todas as figuras,

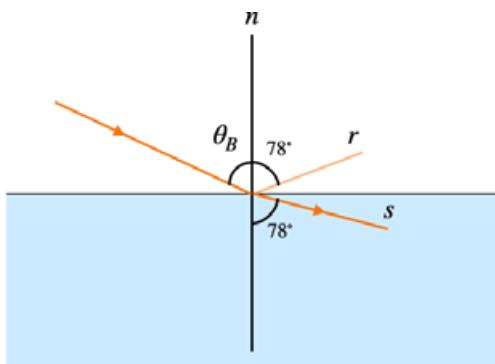
VAMOS PRATICAR

n é a normal ao plano da superfície da água e θ_B são os possíveis ângulos de Brewster. Assinale a alternativa que apresenta corretamente a situação da polarização por reflexão.

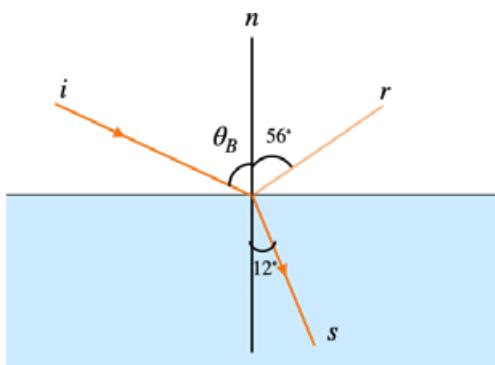
a)



b)

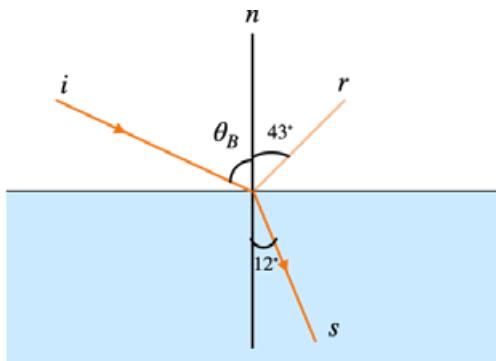


c)

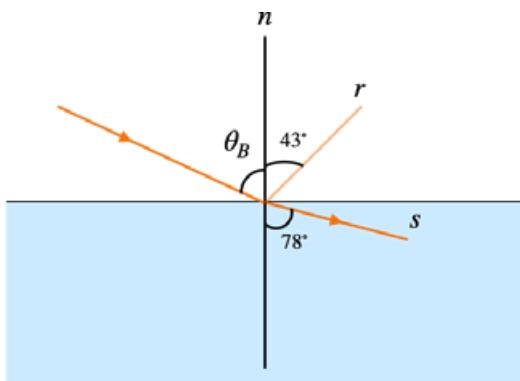


VAMOS PRATICAR

d)

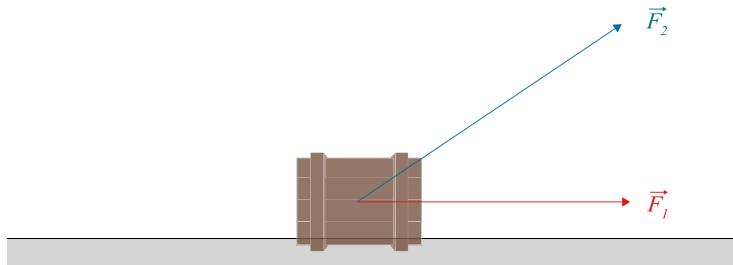


e)



5. Duas ou mais retas são coplanares quando estão contidas no mesmo plano. Quando elas têm apenas um ponto em comum, elas são chamadas de coincidentes.

Duas forças estão aplicadas em uma caixa de acordo com a figura. Os segmentos mostrados são os vetores que representam as forças aplicadas. Analise as afirmativas seguintes sobre esta situação.



-
-
- I - Os segmentos que representam as forças aplicadas são coplanares.
 - II - Os segmentos que representam as forças são coincidentes.
 - III - Os segmentos que representam as forças são perpendiculares.
 - IV - Os segmentos que representam as forças aplicadas são concorrentes.

É correto o que se afirma em:

- a) I e IV, apenas.
- b) II e III, apenas.
- c) III e IV, apenas.
- d) I, II e III, apenas.
- e) II, III e IV, apenas.

REFERÊNCIAS

- BIELLO, D. **Fact or Fiction?**: Archimedes Coined the Term “Eureka!” in the Bath. *Scientific American*. 2006. Disponível em: <http://www.scientificamerican.com/article/fact-or-fiction-archimede>. Acesso em: 21 maio 2023.
- DAPIAZ, M. V. A. D., BONA, J. Geometria. Indaial: Uniasselvi, 2014. Disponível em: <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009. <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO). **Quadro Geral de Unidades e Medidas**. Rio de Janeiro: INMETRO, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/quadro-geral-de-unidades-de-medida-no-brasil.pdf/view>. Acesso em: 21 maio 2023.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. Volume 4: Ótica, Relatividade e Física Quântica. 5 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013. <<https://www.exemplo.com/matematica-financeira.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- TIPLER, P. A. MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. Volume 2: Eletricidade e Magnetismo, Óptica. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

GABARITO

1. A área mostrada é a de um trapézio de base menor $b = 4 - 0 = 4\text{ s}$, base maior igual a $B = 6 - 0 = 6\text{ s}$ e altura igual a $h = 2 - 0 = 2\text{ m/s}$. A área de um trapézio é dada por:

$$S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Entrando com os valores obtidos, temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(6+4) \cdot 2}{2} \\ &= 10\text{ m} \end{aligned}$$

Assim, o deslocamento total foi de 10 metros até parar.

2. Como a densidade é definida como a razão entre a massa e o volume, $\rho = \frac{m}{V}$ e o volume de um cubo vale $V = (2,00\text{ cm})^3 = 8,00\text{ cm}^3$, então

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{5,76\text{ g}}{8,00\text{ cm}^3} \\ &= 0,725\text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Portanto, a densidade do cubo de madeira vale $0,725\text{ g/cm}^3$.

FÓRMULA:

Volume de um prisma quadrangular regular.

3. Opção A.

De acordo com a figura, um par de eixos mutuamente ortogonais é mostrado e é nesta base que a força está representada. O vetor que representa a força faz um ângulo de 34° com o eixo vertical. Como a soma dos ângulos é igual a 90° , então trata-se de um ângulo complementar:

$$\begin{aligned} 34^\circ + \theta &= 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - 34^\circ \\ \therefore \theta &= 56^\circ \end{aligned}$$

Assim, o ângulo indicado na figura vale 56° , pois é complementar ao de 34° .

FÓRMULA:

Soma dos ângulos e ângulos complementares.

4. Opção A.

Conforme a definição do ângulo de Brewster, quando o raio refletido, r, for perpendicular ao raio refratado, s, então ocorre a polarização por reflexão. Apenas na alternativa A ocorre este fato, pois somando os ângulos dados dos raios refletido e refratado, respectivamente, temos:

$$56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$$

o que significa que são complementares.

Seja ϕ o ângulo entre os raios refletido, r, e refratado, s. Neste caso,

$$90^\circ + \phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ$$

Em nenhuma outra alternativa ocorre isso.

FÓRMULA:

Soma dos ângulos e ângulos complementares.

5. Opção A.

Dois vetores sempre geram um plano. Assim, os dois vetores mostrados a partir dos segmentos são coplanares, isto é, estão no mesmo plano. Assim, a afirmativa I é correta. Como as forças obviamente não são perpendiculares, a alternativa correta é a letra A. Contudo, vamos analisar ainda a afirmativa IV. Como os segmentos têm a mesma origem, que é o mesmo ponto em comum, então as forças são representadas por segmentos concorrentes, o que valida a afirmativa IV, confirmando a alternativa correta como letra A. Para complementar, as forças não são coincidentes, pois elas só têm um ponto em comum, invalidando a alternativa II.